LÓGICA EI

RESOLUÇÃO DO 2º TESTE

13 . JUNHO . 2013

1.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(3)} \qquad \cancel{p_1 \to p_2}^{(1)}}{p_2}\,{\to}E \qquad \cancel{\neg p_2}^{(2)}}{\bot}\,{\neg}E}{\neg p_1}\,{\neg}I^{(3)}}{\neg p_2 \to \neg p_1}\,{\to}I^{(2)}}{(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)}\,{\to}I^{(1)}$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$ sem folhas não canceladas. Logo, esta derivação prova que $(p_1 \to p_2) \to (\neg p_2 \to \neg p_1)$ é um teorema.

(b) Admitamos que $\Gamma \vdash p_1 \to p_2$. Então, existe uma derivação $\begin{matrix} D \\ p_1 \to p_2 \end{matrix}$ em DNP cuja conclusão é $p_1 \to p_2$ e cujas hipóteses não canceladas são elementos de Γ.

Então,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_1}^{(2)} \qquad \begin{matrix} D \\ p_1 \to p_2 \end{matrix}}{p_2}\,{\to}E \qquad \cancel{\neg p_2}^{(1)}}{\bot}\,{\neg}E}{\neg p_1}\,{\neg}I^{(2)}}{\neg p_2 \to \neg p_1}\,{\to}I^{(1)}$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $\neg p_2 \to \neg p_1$ e cujas hipóteses não canceladas são exatamente as hipóteses não canceladas de D. Logo, $\Gamma \vdash \neg p_2 \to \neg p_1$.

2.

(a)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg\varphi \vee \psi}^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\varphi}^{(2)} \qquad \cancel{\neg\varphi}^{(3)}}{\bot}}{\psi}\,(\bot) \qquad \cancel{\psi}^{(3)}}{\psi}\,{\vee}E^{(3)}}{\varphi \to \psi}\,{\to}I^{(2)}}{(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)}\,{\to}I^{(1)}$$

é uma derivação em DNP cuja conclusão é $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ e cujas folhas não são hipóteses não canceladas. Logo, $(\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$ é um Teorema e a afirmação é verdadeira.

(b) Sejam $\varphi = p_0$ e $\psi = p_1$. Vejamos que $\varphi \vee \psi \nvdash \varphi \to \psi$.

Pelo Teorema da Adequação, sabemos que

$$p_0 \vee p_1 \vdash p_0 \to p_1$$

se e só se

$$p_0 \vee p_1 \models p_0 \to p_1 .$$

Ora, se v é uma valoração tal que $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$, temos que $v(p_0 \vee p_1) = 1$, mas $v(p_0 \to p_1) = 0$. Logo,

$$p_0 \vee p_1 \not\models p_0 \to p_1 ,$$

donde

$$p_0 \vee p_1 \nvdash p_0 \to p_1 .$$

Assim, a afirmação é falsa.

3.

(a) $t = f(f(0))$.

Temos que

$$\begin{aligned} subt(t) &= \{f(f(0))\} \cup subt(f(0)) = \\ &= \{f(f(0))\} \cup \{f(0)\} \cup subt(0) \\ &= \{f(f(0)), f(0)\} \cup \{0\} \\ &= \{f(f(0)), f(0), 0\} . \end{aligned}$$

Logo, t tem 3 subtermos.

(b) $\varphi = \forall x_0 \ (x_0 = x_1)$

$LIG(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIV(\varphi) = \{x_1\}$.

Além disso,

$$x_0 = x_1, \quad \forall x_0 \, (x_0 = x_1)$$

é uma sequência de formação de φ.

(c) i) x_0 tem ocorrências livres em φ no alcance de $\exists x_1$ e $\forall x_2$.
Como $VAR(f(x_3)) = \{x_3\}$ e $x_1 \notin \{x_3\}$ e $x_2 \notin \{x_3\}$, podemos afirmar que x_0 é substituível por $f(x_3)$ em φ_0.
A afirmação é verdadeira.

ii) Consideremos o termo $f(x_1)$. Sabemos que $x_1 \in VAR(f(x_1))$ e que x_0 tem uma ocorrência livre no alcance de $\exists x_1$ em φ_0. Logo, x_0 não é substituível por $f(x_1)$ em φ_0. A afirmação é, portanto, falsa.

(d) A função $h: \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ é definida, por recursão estrutural, por

1) $h(0) = 0$;
2) $h(x) = 0$, para todo $x \in \mathcal{V}$;
3) $h(f(t)) = 1 + h(t)$, para todo $t \in \mathcal{T}_L$.

4.

(a)

(i) $f(f(x_4)) = \bar{f}(\bar{f}(a(x_4))) = \bar{f}(\bar{f}(4)) = \bar{f}(4+3) =$

$= (4+3) + 3 = 10.$

(ii) Temos que

$$(\exists x_1 \, f(x_1) = 0) \vee \neg P(f(x_2)) \, [a] = 1$$

se e só se $(\exists x_1 \, f(x_1) = 0)[a] = 1$ ou $P(f(x_2))[a] = 0$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $(f(x_1) = 0)[a \binom{x_1}{d}] = 1$ ou $\bar{f}(a(x_2)) \notin \bar{P}$

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d + 3 = 0$ ou $2 + 3$ não é múltiplo de 3

sse existe $d \in \mathbb{N}_0$ t.q. $d + 3 = 0$ ou 5 não é múltiplo de 3,

uma afirmação verdadeira.

Logo, $(\exists x_1\, f(x_1)=0) \vee \neg P(f(x_2))\ [a] = 1$.

(b)

(i) Seja a' uma atribuição em E

Temos que

$\varphi[a']_E = 1$ se e só se $(f(x_1) = x_2 \wedge P(x_1))\ [a'] = 0$ ou $P(x_2)\ [a'] = 1$

se e só se $f(x_1) = x_2\ [a'] = 0$ ou $P(x_1)\ [a'] = 0$ ou $P(x_2)\ [a'] = 1$

sse $\underbrace{a'(x_1) + 3 \neq a'(x_2) \text{ ou } a'(x_1) \notin \overline{P} \text{ ou } a'(x_2) \in \overline{P}}_{A}$

Se $a'(x_1)$ não é múltiplo de 3, então esta última afirmação A é verdadeira.

Se $a'(x_1)$ é múltiplo de 3, consideremos dois casos: (a) $a'(x_2)$ é múltiplo de 3; (b) $a'(x_2)$ não é múltiplo de 3. No caso (a), temos então que $a'(x_2) \in \overline{P}$, donde A é verdadeira. No caso (b), temos que $a'(x_2)$ não pode ser igual a $a'(x_1)+3$, uma vez que, nesse caso, seria múltiplo de 3. Logo, também no caso (b), A é verdadeira.

Podemos, pois, concluir que $\varphi[a']_E = 1$.

Assim, φ é válida em E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{N}_0, \sim)$ onde $\sim$ é como $-$ exceto para a interpretação de P que é $\tilde{P} = \{n \in \mathbb{N}_0 : n \text{ é par}\}$.

Seja a a atribuição em E' tal que
$a(x_i) = \begin{cases} 2 & \text{se } i \neq 2 \text{ e } i \in \mathbb{N}_0 \\ 5 & \text{se } i = 2 \end{cases}$

Temos que $((f(x_1) = x_2 \wedge P(x_1)) \to P(x_2))[a]_{E'} = 0$ se e só se $(f(x_1) = x_2 \wedge P(x_1))\ [a]_{E'} = 1$ e $P(x_2)\ [a]_{E'} = 0$.

Ora
$(f(x_1) = x_2 \wedge P(x_1))\ [a]_{E'} = 1$ e $P(x_2)\ [a]_{E'} = 0$
se e só se $(f(x_1) = x_2)[a]_{E'} = 1$ e $P(x_1)\ [a]_{E'} = 1$ e $P(x_2)\ [a]_{E'} = 0$

se e só se $\tilde{f}(a(x_1)) = a(x_2)$ e $a(x_1) \in \tilde{P}$ e $a(x_2) \notin \tilde{P}$

sse $2+3=5$ e 2 é par e 5 não é par, uma afirmação verdadeira.

Logo, $\varphi[a]_{E'} = 0$, donde φ não é universalmente válida.

(c) Seja $\psi = (P(x_0) \leftrightarrow P(x_0))$. Considerando-se uma instanciação i tal que $i(p_0)$ é a fórmula $P(x_0)$, tem-se

$$i(p_0 \leftrightarrow p_0) = i(p_0) \leftrightarrow i(p_0)$$
$$= P(x_0) \leftrightarrow P(x_0) = \psi.$$

Assim ψ é uma instância de $p_0 \leftrightarrow p_0$. Dado que $p_0 \leftrightarrow p_0$ é uma tautologia do CP, podemos concluir que ψ é universalmente válida.

(d) (i) $\exists x_0 \, (P(x_0) \wedge \neg(x_0 = 0))$.

(ii) $\forall x_0 \, (P(x_0) \rightarrow P(f(x_0)))$.

5.

Sejam E uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que

$$(\exists x \varphi)[a]_E = 1 \quad (*)$$

e

$$(\forall x \, (\varphi \rightarrow \psi))[a]_E = 1 \quad (**)$$

Queremos mostrar que $(\exists x \psi)[a]_E = 1$.

De $(*)$ sabemos que existe $d_0 \in \text{dom} E$ tal que $\varphi\left[a\binom{x}{d_0}\right] = 1$.

De $(**)$ sabemos que para todo $d \in \text{dom} E$ $(\varphi \rightarrow \psi)\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$.

Assim, para todo $d \in \text{dom} E$ $\left(\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] = 0 \text{ ou } \psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1\right)$.

Logo, para $d = d_0$, como $\varphi\left[a\binom{x}{d}\right] \neq 0$, temos que $\psi\left[a\binom{x}{d}\right] = 1$.

Assim, existe $d_0 \in \text{dom} E$ tal que: $\psi\left[a\binom{x}{d_0}\right] = 1$,

donde $(\exists x \psi)[a]_E = 1$.