Universidade do Minho	17 de Junho de 2011
Resolução do 2º Teste de **Lógica EI**	
Lic. Eng. Informática	Duração: 2 horas

1. (a) Construa derivações em DNP que provem que:

   (i) $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é um teorema;

   (ii) $\neg(p_0 \wedge p_1) \vdash (p_0 \to \neg p_1)$.

R: *(i) Um teorema é uma fórmula que admite derivações em DNP sem hipóteses por cancelar. Uma tal derivação de $(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)$ é:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_1}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{p_0 \wedge p_1}^{(2)}}{p_0}\,E\wedge_1 \quad \cancel{p_0 \to \neg p_1}^{(1)}}{\neg p_1}\,E\to}{\bot}\,E\neg}{\neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\neg^{(2)}}{(p_0 \to \neg p_1) \to \neg(p_0 \wedge p_1)}\,I\to^{(1)}$$

(ii) É necessário construir uma derivação cuja conclusão seja $p_0 \to \neg p_1$ e cujo conjunto de hipóteses por cancelar seja um subconjunto de $\{\neg(p_0 \wedge p_1)\}$. Uma derivação nestas condições é:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \neg(p_0 \wedge p_1)}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

(b) Seja Γ um conjunto de fórmulas do Cálculo Proposicional. Prove que, se $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$, então $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

R: *Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, existe uma derivação $\mathcal{D}$ cuja conclusão é $\neg(p_0 \wedge p_1)$ e cujo conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ. Assim,*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{p_0}^{(1)} \quad \cancel{p_1}^{(2)}}{p_0 \wedge p_1}\,I\wedge \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}\\ \neg(p_0 \wedge p_1)\end{matrix}}{\bot}\,E\neg}{\neg p_1}\,I\neg^{(2)}}{p_0 \to \neg p_1}\,I\to^{(1)}$$

é uma derivação cuja conclusão é $p_0 \to \neg p_1$ e conjunto de hipóteses não canceladas é um subconjunto de Γ, o que prova $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$.

Uma resolução alternativa é a que se segue.

Suponhamos $\Gamma \vdash \neg(p_0 \wedge p_1)$. Então, pelo Teorema da Correcção, $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$. Para provar $\Gamma \vdash p_0 \to \neg p_1$, pelo Teorema da Completude, basta provar $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$. Seja v uma valoração arbitrária que satisfaça Γ. De $\Gamma \models \neg(p_0 \wedge p_1)$, segue que $v(\neg(p_0 \wedge p_1)) = 1$, o que implica que $v(p_0) = 0$ ou $v(p_1) = 0$ e, em ambos os casos, segue que $v(p_0 \to \neg p_1) = 1$. Provamos, assim, que toda a valoração que satisfaz Γ atribui valor 1 a $p_0 \to \neg p_1$, o que prova $\Gamma \models p_0 \to \neg p_1$, como pretendido.

2. Considere o tipo de linguagem $L = (\{0, \mathsf{s}, -\}, \{\mathsf{P}, <\}, \mathcal{N})$ em que $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(\mathsf{s}) = 1$, $\mathcal{N}(-) = 2$, $\mathcal{N}(\mathsf{P}) = 1$ e $\mathcal{N}(<) = 2$.

   (a) Das seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_L$, apresente árvores de formação das que pertencem a $\mathcal{T}_L$ ou $\mathcal{F}_L$, e indique (sem justificar) quais as que não pertencem a nenhum desses conjuntos.

   (i) $\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0))$ (ii) $(x_1 - 0) \vee \mathsf{P}(x_2)$

   (iii) $\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1))$ (iv) $\forall_{x_0}(\mathsf{P}(x_0, 0) \vee (\mathsf{s}(x_0) < 0))$

R: *As palavras das alíneas (ii) e (iv) não pertencem nem a $\mathcal{T}_L$ nem a $\mathcal{F}_L$. A palavra da alínea (i) pertence a $\mathcal{T}_L$ e a da alínea (iii) pertence a $\mathcal{F}_L$. As árvores de formação que justificam esta afirmação são as seguintes:*

$$\dfrac{\dfrac{\overline{x_1 \in \mathcal{T}_L}\ x_1}{\mathsf{s}(x_1) \in \mathcal{T}_L}\ \mathsf{s} \quad \dfrac{\overline{x_2 \in \mathcal{T}_L}\ x_2 \quad \dfrac{\overline{0 \in \mathcal{T}_L}\ 0}{\mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\ \mathsf{s}}{x_2 - \mathsf{s}(0) \in \mathcal{T}_L}\ -}{\mathsf{s}(x_1) - (x_2 - \mathsf{s}(0)) \in \mathcal{T}_L}\ -$$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\mathsf{P}(x_1) \in \mathcal{F}_L}\ At_L \quad \dfrac{\overline{(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\ At_L}{\forall_{x_1}(x_2 < x_1) \in \mathcal{F}_L}\ \forall_{x_1}}{(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\ \wedge}{\exists_{x_2}(\mathsf{P}(x_1) \wedge \forall_{x_1}(x_2 < x_1)) \in \mathcal{F}_L}\ \exists_{x_2}$$

(b) Indique (justificando) o conjunto das variáveis substituíveis pelo L-termo $x_2 - \mathsf{s}(x_1)$ na L-fórmula $\forall_{x_1}(\mathsf{P}(x_4) \to \exists_{x_0}\neg(x_0 < x_2 - \mathsf{s}(x_1 - 0)))$.

R: *Sejam t e φ respectivamente o termo e a fórmula dados. O conjunto pedido é $\mathcal{V}\backslash\{x_2, x_4\}$, onde $\mathcal{V}$ é o conjunto de todas as variáveis. Por um lado, quer x_2, quer x_4, têm, em φ, uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall_{x_1}$. Como $x_1 \in VAR(t)$, nem x_2, nem x_4 são substituíveis por t em φ. Por outro lado, nenhuma outra variável tem ocorrências livres em φ. Portanto, qualquer outra variável é substituível por t em φ.*

(c) Defina por recursão estrutural a função $f : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathbb{N}_0$ que a cada L-termo t faz corresponder o número de ocorrências da variável x_{2011} em t.

R: *A função é definida por recursão estrutural do seguinte modo:*

$$\begin{array}{rcll} f(x_i) & = & 1 & \textit{se } i = 2011 \\ f(x_i) & = & 0 & \textit{se } i \neq 2011 \\ f(0) & = & 0 & \\ f(\mathsf{s}(t) & = & f(t) & \textit{para todo } t \in \mathcal{T}_L \\ f(t - t') & = & f(t) + f(t') & \textit{para todo } t, t' \in \mathcal{T}_L \end{array}$$

3. Sejam L o tipo de linguagem da pergunta anterior e $E = (\mathbb{Z}, \overline{\ })$ a L-estrutura tal que $\overline{0}$ é o número *zero*, $\overline{\mathsf{s}}$ e $\overline{-}$ são as operações de *sucessor* e *subtração* em $\mathbb{Z}$, respectivamente, $\overline{\mathsf{P}} = 2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ (ou seja, $\overline{\mathsf{P}}$ é o predicado "é par"), e $\overline{<}$ é a relação "menor do que" em $\mathbb{Z}$.

(a) Seja a a atribuição em E tal que, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, $a(x_i) = i$. Calcule:

(i) $(0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a]$

(ii) $(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a]$

R: *(i) O valor do L-termo $0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8)$ para a atribuição a é o elemento de $\mathbb{Z}$, o domínio de E, obtido pelos seguintes cálculos recursivos:*

$$\begin{aligned} (0 - \mathsf{s}(x_1 - x_8))\,[a] &= 0[a] \mathbin{\overline{-}} \mathsf{s}(x_1 - x_8)[a] \\ &= \overline{0} \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,((x_1 - x_8)[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(x_1[a] \mathbin{\overline{-}} x_8[a]) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(a(x_1) \mathbin{\overline{-}} a(x_8)) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(1 \mathbin{\overline{-}} 8) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} \overline{\mathsf{s}}\,(-7) \\ &= 0 \mathbin{\overline{-}} (-6) \\ &= 6. \end{aligned}$$

(ii) A L-fórmula $\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$ *é a conjunção das L-fórmulas* $\mathsf{P}(x_2)$ *e* $\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0)$. *Tem-se portanto que*

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\}.$$

Ora, por um lado, $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$ *se e só se* $(x_2)[a] \in \overline{\mathsf{P}}$, *se e só se* $2 \in \overline{\mathsf{P}}$. *Como, de facto,* 2 *é um elemento do conjunto* $\overline{\mathsf{P}}$, *deduz-se que* $\mathsf{P}(x_2)[a] = 1$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1 \quad & \textit{sse} \quad \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } (\mathsf{s}(x_1) < 0)[a\tbinom{x_1}{n_1}] = 1 \\
& \textit{sse} \quad \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \mathsf{s}(x_1)[a\tbinom{x_1}{n_1}] \,\overline{<}\, 0[a\tbinom{x_1}{n_1}] \\
& \textit{sse} \quad \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(x_1[a\tbinom{x_1}{n_1}]) \,\overline{<}\, \overline{0} \\
& \textit{sse} \quad \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } \overline{\mathsf{s}}(n_1) \,\overline{<}\, 0 \\
& \textit{sse} \quad \textit{existe } n_1 \in \mathbb{Z} \textit{ tal que } n_1 + 1 \,\overline{<}\, 0.
\end{aligned}$$

Dado que esta última afirmação é verdadeira (basta tomar, por exemplo, $n_1 = -2$*), conclui-se que* $(\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a] = 1$.
Pode-se finalmente deduzir que

$$(\mathsf{P}(x_2) \wedge \exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))\,[a] = \min\{\mathsf{P}(x_2)[a], (\exists_{x_1}(\mathsf{s}(x_1) < 0))[a]\} = \min\{1, 1\} = 1.$$

(b) Seja $\varphi = \neg\mathsf{P}(x_0 - x_1) \to ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))$. Prove que:

(i) φ é válida em E;

(ii) φ não é universalmente válida.

R: *(i) A L-fórmula* φ *é válida em* E, *ou seja* $E \models \varphi$, *se* $\varphi[a]_E = 1$ *para toda a atribuição* a *em* E. *Seja* a *uma atribuição qualquer em* E. *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\varphi[a]_E = 1 \quad & \textit{sse} \quad (\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 0 \textit{ ou } ((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 1 \\
& \textit{sse} \quad \mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_0 < x_1)[a] = 1 \textit{ ou } (x_1 < x_0)[a] = 1 \\
& \textit{sse} \quad (x_0 - x_1)[a] \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } x_0[a] \,\overline{<}\, x_1[a] \textit{ ou } x_1[a] \,\overline{<}\, x_0[a] \\
& \textit{sse} \quad a(x_0) \,\overline{-}\, a(x_1) \in \overline{\mathsf{P}} \textit{ ou } a(x_0) \,\overline{<}\, a(x_1) \textit{ ou } a(x_1) \,\overline{<}\, a(x_0).
\end{aligned}$$

Suponhamos que $a(x_0) \,\overline{-}\, a(x_1) \notin \overline{\mathsf{P}}$. *Então* $a(x_0) \,\overline{-}\, a(x_1) \neq 0$, *donde* $a(x_0) \neq a(x_1)$. *Daqui resulta que* $a(x_0) \,\overline{<}\, a(x_1)$ *ou* $a(x_1) \,\overline{<}\, a(x_0)$ *e, portanto,* $\varphi[a]_E = 1$. *Como* a *é uma atribuição arbitrária em* E *conclui-se assim que* φ *é válida em* E.

(ii) Seja $E' = (\mathbb{Z}, \overline{\ })$ *a L-estrutura em tudo idêntica a* E *salvo em* $\overline{<}$ *que é definida como sendo a relação de igualdade em* $\mathbb{Z}$. *Seja* a *a atribuição da alínea* (a).
Tem-se $(\neg\mathsf{P}(x_0 - x_1))[a] = 1$. *De facto* $(x_0 - x_1)[a] = -1 \notin \overline{\mathsf{P}}$, *donde* $\mathsf{P}(x_0 - x_1)[a] = 0$.
Verifiquemos, por outro lado, que $((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0$. *De facto, tem-se*

$$\begin{aligned}
((x_0 < x_1) \vee (x_1 < x_0))[a] = 0 \quad & \textit{sse} \quad (x_0 < x_1)[a] = 0 \textit{ e } (x_1 < x_0)[a] = 0 \\
& \textit{sse} \quad (x_0[a], x_1[a]) \notin \overline{<} \textit{ e } (x_1[a], x_0[a]) \notin \overline{<} \\
& \textit{sse} \quad (0, 1) \notin \overline{<} \textit{ e } (1, 0) \notin \overline{<} \\
& \textit{sse} \quad 0 \neq 1 \textit{ e } 1 \neq 0
\end{aligned}$$

afirmação esta que é, evidentemente, válida. Logo $\varphi[a]_{E'} = 0$ *e, portanto, a L-fórmula* φ *não é válida na L-estrutura* E', *donde não é universalmente válida.*

(c) Indique (justificando) uma L-fórmula universalmente válida.

R: *A fórmula $\psi = \mathsf{P}(x_1) \vee \neg\mathsf{P}(x_1)$ é uma L-fórmula universalmente válida. Para justificar esta afirmação basta notar que ψ é uma instância da fórmula $\varphi = p_0 \vee \neg p_0$ do cálculo proposicional (pois $\psi = \varphi[\mathsf{P}(x_1)/p_0]$) e φ é uma tautologia (como é já sabido).*

(d) Para cada uma das seguintes afirmações, indique (sem justificar) uma L-fórmula que a represente:

(i) Todo o número é menor do que algum número par.

(ii) A diferença de quaisquer dois números pares é par.

R: *(i)* $\forall_{x_0}\exists_{x_1}(\mathsf{P}(x_1) \wedge (x_0 < x_1))$.

(ii) $\forall_{x_0}\forall_{x_1}((\mathsf{P}(x_0) \wedge \mathsf{P}(x_1)) \to \mathsf{P}(x_0 - x_1))$.

4. (a) Sejam L, $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x arbitrários. Mostre que $\exists_x(\varphi \wedge \psi) \models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi)$.

R: *Sejam $E = (D, \overline{\ })$ uma L-estrutura e a uma atribuição em E tais que*

$$E \models \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a] \qquad (*)$$

Queremos $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.

De $(*)$ segue que existe $d \in D$ tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d}]$ e $E \models \psi[a\binom{x}{d}]$. Mas então podemos trivialmente afirmar

(i) existe $d_1 \in D$ (a saber: $d_1 = d$) tal que $E \models \varphi[a\binom{x}{d_1}a]$;

(ii) existe $d_2 \in D$ (a saber: $d_2 = d$) tal que $E \models \psi[a\binom{x}{d_2}]$.

De (i) segue $E \models \exists_x\varphi[a]$ e de (ii) segue $E \models \exists_x\psi[a]$. Logo $E \models \exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi[a]$.

(b) Indique (justificando) L tipo de linguagem, φ e ψ L-fórmulas e x variável tais que $\not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)$.

R: *Sejam L o tipo de linguagem da questão 2, $x = x_0$, $\varphi = \mathsf{P}(x_0)$ e $\psi = \neg\mathsf{P}(x_0)$. Vamos exibir uma L-estrutura E e uma atribuição a em E tais que $E \not\models (\exists_x\varphi \wedge \exists_x\psi) \to \exists_x(\varphi \wedge \psi)[a]$. Tome-se E a estrutura da questão 3 e a atribuição arbitrária. Falta ver que:*

(i) $E \models \exists_{x_0}\varphi[a]$;

(ii) $E \models \exists_{x_0}\psi[a]$;

(iii) $E \not\models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$.

(i) Sejam $d' = 2$ e $a' = a\binom{x_0}{d'}$. Então $E \models \varphi[a']$ pois $x_0[a'] = d'$ e $d' \in \overline{\mathsf{P}}$.

(ii) Sejam $d'' = 1$ e $a'' = a\binom{x_0}{d''}$. Então $E \models \psi[a'']$ pois $x_0[a''] = d''$ e $d'' \notin \overline{\mathsf{P}}$.

(iii) $E \models \exists_{x_0}(\varphi \wedge \psi)[a]$ sse existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $x_0[a\binom{x_0}{d}] \in \overline{\mathsf{P}}$ e $x_0[a\binom{x_0}{d}] \notin \overline{\mathsf{P}}$. Mas $x_0[a\binom{x_0}{d}] = d$ e não se pode ter simultaneamente $d \in \overline{\mathsf{P}}$ e $d \notin \overline{\mathsf{P}}$.

(c) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_L$ e x tais que $x \notin LIV(\psi)$. Prove que $(\forall_x\varphi) \to \psi \Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)$. (Sugestão: exiba uma série de equivalências lógicas.)

R:

$$\begin{aligned}
(\forall_x\varphi) \to \psi &\Leftrightarrow \neg\forall_x\varphi \vee \psi \\
&\Leftrightarrow \exists_x\neg\varphi \vee \psi \\
&\Leftrightarrow \exists_x\neg\varphi \vee \exists x\psi \quad (x \notin LIV(\psi)) \\
&\Leftrightarrow \exists_x(\neg\varphi \vee \psi) \\
&\Leftrightarrow \exists_x(\varphi \to \psi)
\end{aligned}$$

Cotações	1.	2.	3.	4.
	3+1	1,5+1+1,5	2,5+2+1,5+1,5	1,5+1,5+1,5