Lógica CC
Licenciatura em Ciências da Computação

Luís Pinto

Departamento de Matemática
Universidade do Minho

1º. semestre, 2020/2021

3. Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica

Observação 123: O *Cálculo de Predicados de Primeira Ordem da Lógica Clássica* (adiante abreviado por *Cálculo de Predicados*) é também conhecido na literatura por *Lógica de Primeira Ordem Clássica* ou, simplesmente, por *Lógica de Primeira Ordem*.

Observação 124:

Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos *termos* e a classe das *fórmulas*.

Os termos serão usados para denotar *objetos* do domínio de discurso em questão (por exemplo, *números naturais*, *conjuntos*, etc.).

As fórmulas corresponderão a *afirmações* relativas aos objetos (por exemplo, “dois é um número par” ou “o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto”).

Observação 124 (cont.):

O Cálculo de Predicados será *parametrizado* por um *tipo de linguagem*, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por *símbolos de função*) ou para denotar *relações elementares* entre os objetos (que designaremos por *símbolos de relação*). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a *Aritmética* (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade.

Já no caso de estarmos a considerar *Teoria de Conjuntos*, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 125: Um *tipo de linguagem* é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ tal que:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados *símbolos de função* e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados *símbolos de relação* ou *símbolos de predicado*.

A função $\mathcal{N}$ é chamada *função aridade*, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo n-*ário*. Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu *número de argumentos*.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados *constantes*.

Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também símbolos *unários*, os de aridade 2 *binários*, etc.

Exemplo 126:

O terno $L_{Arit} = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem.

Chamaremos a L_{Arit} o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Exemplo 127:

O terno $L_{grupo} = (\{\cdot, 1, ^{-1}\}, \{=\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(\cdot) = 2$, $\mathcal{N}(1) = 0$, $\mathcal{N}(^{-1}) = 1$ e $\mathcal{N}(=) = 2$, é uma linguagem.

Chamaremos a L_{grupo} o *tipo de linguagem para grupos*.

Exemplo 128:

O terno $L_{cpo} = (\{\}, \{=, \leq\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(\leq) = 2$, é uma linguagem.

Chamaremos a L_{cpo} o *tipo linguagem para conjuntos parcialmente ordenados*.

Notação 129:

Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens.

Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, sendo o respetivo conjunto de constantes denotado por $\mathcal{C}$.

Definição 130: O *alfabeto $\mathcal{A}_L$ induzido pelo tipo de linguagem L* é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\perp$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de L (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 131:

A sequência de 8 símbolos

$$\exists x_0 \neg (x_0 = 0)$$

é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$.

Mas, a sequência de 8 símbolos

$$\exists x_0 \neg (x_0 = 1)$$

não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$).

Definição 132: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo L* ou, abreviadamente, *L-termos*.

Exemplo 133:

1. As seguintes 6 palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são termos de tipo L_{Arit}:
$$x_1,\ x_2,\ 0,\ s(0),\ \times(x_1, x_2),\ +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$
Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $=(0, x_1)$ e $<(0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são L_{Arit}-termos.
Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois L_{Arit}-termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição **c)** da definição anterior.
Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

Exemplo 133 (cont.):

3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são termos de tipo L_{grupo} (e lidas em sequência constituem uma sequência de formação da última palavra):

$$x_1,\ x_2,\ 1,\ {}^{-1}(x_1),\ \cdot(x_2,1),\ \cdot(\cdot(x_2,1),{}^{-1}(x_1)).$$

4. O conjunto dos termos de tipo L_{cpo} é o conjunto das variáveis $\mathcal{V}$.

Exemplo 134:

Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-termos (e constituem uma sequência de formação do último termo):

$$c\,,\ x_1\,,\ f_2(c, x_1)\,,\ f_1(f_2(c, x_1))\,.$$

Notação 135:

Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 f\, t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-termo $f(t_1, t_2)$.

Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o L_{Arit}-termo $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

No contexto do tipo de linguagem L_{grupo}, termos da forma ${}^{-1}(t)$ serão, normalmente, denotados por t^{-1} ou $(t)^{-1}$.

Por exemplo, $x_1 \cdot x_1^{-1}$ denotará o L_{grupo}-termo $\cdot(x_1, {}^{-1}(x_1))$.

Teorema 136 (Indução Estrutural em L-Termos):

Seja $P(t)$ uma condição sobre um L-termo t.

Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e } ... \text{ e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício. $\square$

Observação 137:

A definição indutiva do conjunto dos L-termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos L-termos.

Este princípio é usado nas três definições que se seguem.

Definição 138: O *conjunto das variáveis* que ocorrem num L-termo t é notado por $VAR(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 139:

O conjunto das variáveis que ocorrem no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$\begin{array}{rl} & VAR(x_2 + s(x_1)) \\ = & VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) \\ = & \{x_2\} \cup VAR(x_1) \\ = & \{x_2, x_1\}. \end{array}$$

Definição 140: O *conjunto dos subtermos* de um L-termo t é notado por $subt(t)$ e é definido, por recursão estrutural em L-termos, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 141:

O conjunto dos subtermos do L_{Arit}-termo $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 142: A operação de *substituição* de uma variável x por um L-termo t num L-termo t' é notada por $t'[t/x]$ e é definida por recursão estrutural (em t') do seguinte modo:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 143:

1. O L_{Arit}-termo que resulta da substituição da variável x_1 pelo L_{Arit}-termo $s(0)$ no L_{Arit}-termo $x_2 + s(x_1)$ é:

$$\begin{array}{rl} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = & x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = & x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = & x_2 + s(s(0)) \end{array}$$

2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$

   (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 144: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 L-termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) $\square$

Definição 145: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma

$$R(t_1, ..., t_n),$$

onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são L-termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo* L ou, abreviadamente, uma *L-fórmula atómica*.

O conjunto das L-fórmulas atómicas é notado por At_L.

Exemplo 146:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ que se seguem são fórmulas atómicas de tipo L_{Arit}:
$$=(0, x_1), <(0, x_1), =(+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$
2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ $\times(0, x_1)$ não é uma L_{Arit}-fórmula atómica (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um L_{Arit}-termo).
3. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{grupo}}$ são fórmulas atómicas de tipo L_{grupo}:
$$=(x_0, x_1) \text{ e } =(x_0 \cdot x_0^{-1}, 1).$$
4. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{cpo}}$ são fórmulas atómicas de tipo L_{cpo}:
$$=(x_0, x_1) \text{ e } \leq (x_0, x_0).$$

Notação 147:

Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 \, R \, t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o L-fórmula atómica $R(t_1, t_2)$.

Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a L_{Arit}-fórmula atómica $< (x_0, s(0))$.

Definição 148: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para toda a L-fórmula atómica φ;

b) $\bot \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi \Box \psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou, abreviadamente, *L-fórmulas*.

Exemplo 149:

1. As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$ são fórmulas de tipo L_{Arit} (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$
\begin{array}{l}
(x_0 < s(0)),\\
(\neg(x_0 < s(0))),\\
x_0 = x_1,\\
((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1),\\
(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)),\\
(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1))).
\end{array}
$$

Lida como uma sequência de palavras sobre $\mathcal{A}_{L_{Arit}}$, esta sequência constitui uma sequência de formação de $(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$.

Exemplo 149 (cont.):

2. $(\forall x_0 (x_0 \leq x_0))$ é uma fórmula de tipo L_{cpo}.
3. $(\exists x_0 (\forall x_1 (x_0 \cdot x_1 = 1)))$ é uma fórmula de tipo L_{grupo}.

Exemplo 150:

Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 134:
$L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.

As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são L_0-fórmulas (e constituem uma sequência de formação da última fórmula):

$$
\begin{array}{l}
R_1(x_1),\\
R_2(x_1, f_2(c, x_1)),\\
(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1))),\\
(\forall x_1 (R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).
\end{array}
$$

Notação 151:

Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos.

Por exemplo, a L_{Arit}-fórmula

$$(\forall x_0 (\exists x_1 ((\neg (x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1 (\neg (x_0 < s(0)) \to x_0 = x_1).$$

Teorema 152 (Indução Estrutural em *L*-Fórmulas):
Seja $P(\varphi)$ uma condição sobre uma *L*-fórmula φ.
Se:

a) $P(\psi)$, para toda a *L*-fórmula atómica ψ;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\, \psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}, x \in \mathcal{V}, \psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício $\square$

Observação 153:

A definição indutiva do conjunto das L-fórmulas é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto das L-fórmulas.

Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 154: O conjunto das *subfórmulas* de uma L-fórmula φ é notado por $subf(\varphi)$ e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) $subf(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $subf(\perp) = \{\perp\}$;

c) $subf(\neg\psi) = subf(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $subf(\psi_1 \square \psi_2) = subf(\psi_1) \cup subf(\psi_2) \cup \{\psi_1 \square \psi_2\}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $subf(Qx\,\psi) = subf(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 155: Seja φ uma L-fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance desta ocorrência do quantificador Qx em φ* é a L-fórmula ψ.

Exemplo 156: Na L_{Arit}-fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0))) :$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é

$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \wedge \exists x_1(x_1 < x_0));$$

2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 157:

Numa L-fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo 158:

Seja φ a L_{Arit}-fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \to \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada.

A ocorrência (a) de x_1 é ligada.

Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 159:

Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 160: A operação de *substituição das ocorrências livres de uma variável x por um L-termo t numa L-fórmula φ* é notada por $\varphi[t/x]$ e é definida, por recursão estrutural em L-fórmulas, do seguinte modo:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$, de aridade n, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 161:

1.
$$\begin{array}{lll} & (x_0 < s(x_1))[0/x_0] & \\ = & x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0] & \text{(def. anterior } \textbf{a)}\text{)} \\ = & 0 < s(x_1) & \text{(substituição em } L\text{-termos)} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) & \text{(def. anterior } \textbf{e)}\text{, } 1^o \text{ caso)} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1] & \text{(def. anterior } \textbf{e)}\text{, } 2^o \text{ caso)} \\ = & \exists x_0(x_0 < s(0)) & \text{(def. anterior } \textbf{a)} \text{ e substituição er} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0 & \text{(porquê?)} \end{array}$$

Exemplo 162: Seja φ a L_{Arit}-fórmula $\exists x_1(x_0 < x_1)$. Então,

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1(s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 "não depende" da quantificação $\exists x_1$, mas, após a substituição, o termo $s(x_1)$, que substituiu x_0, "depende" da quantificação $\exists x_1$.[1]

Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

[1]Note que tomando $\mathbb{N}_0$ como domínio de interpretação das variáveis e interpretando s como a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$ e $<$ como a relação de igualdade em $\mathbb{N}_0$, φ é verdadeira, enquanto $\varphi[s(x_1)/x_0]$ é falsa.
(Esta noção de interpretação de fórmulas será tornada precisa na secção seguinte.)

Definição 163: Sejam x uma variável, t um L-termo e φ uma L-fórmula. Diz-se que *x é substituível* (*sem captura de variáveis*) *por t em φ* ou que *t é livre para x em φ* quando para todas as ocorrências livres de x em φ no alcance de algum quantificador Qy, $y \notin VAR(t)$.

Observação 164: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa L-formula φ ou t é um L-termo onde não ocorrem variáveis, x é substituível por t em φ.

Exemplo 165: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

a) x_0 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 é substituível por $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Observação 166: Note-se que, mesmo quando uma variável x não é substituível por um L-termo t numa L-fórmula φ, a operação de substituição de x por t em φ encontra-se definida.

Por exemplo, x_2 não é substituível por $x_1 + s(x_2)$ em

$$\varphi = \forall x_1 (x_1 < x_2) \lor \neg(x_1 < x_2));$$

a L_{Arit}-fórmula resultante da substituição de x_2 por $x_1 + s(x_2)$ em φ encontra-se definida e é igual a

$$\forall x_1 (x_1 < x_1 + s(x_2)) \lor \neg(x_1 < x_1 + s(x_2))),$$

no entanto, ao efetuar a substituição, acontece o fenómeno da captura de variáveis.

Proposição 167: Sejam φ uma L-fórmula, x uma variável e t um L-termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.
Dem.: Por indução estrutural em L-fórmulas. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ.

a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} \perp = \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n-ário, e $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese. Assim, aplicando a Proposição 144, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, \dots, t_n)[t/x] \overset{(1)}{=} R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x]) \overset{(2)}{=} R(t_1, \dots, t_n) = \varphi.$$

Justificações

(1) Definição de substituição.
(2) $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy\,\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} Qy\,\varphi_1[t/x] \overset{\textbf{(2)}}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício. □

Definição 168: Uma L-fórmula φ diz-se uma *sentença de tipo L* ou uma *fórmula fechada de tipo L* (abreviadamente, uma *L-sentença* ou uma *L-fórmula fechada*), quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 169: Seja φ uma L-sentença. Então, para toda a variável x e para todo o L-termo t,

1. x é substituível por t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. $\square$