4. Teoria de categorias

A teoria de categorias é um ramo da matemática relativamente recente e foi desenvolvido no sentido de permitir representar de forma uniforme diferentes estruturas matemáticas. A teoria de categorias permite identificar semelhanças estruturais entre diversos objetos matemáticos que à primeira vista não parecem estar relacionados, sendo assim possível formular conceitos de grande generalidade e efetuar a prova de resultados com aplicações nas mais diversas áreas da matemática, incluindo as ciências da computação.

4.1 Categorias

As teorias axiomáticas desempenham um papel relevante na área de matemática. Estas teorias são caracterizadas por conjuntos com uma determinada estrutura e por correspondências entre estes conjuntos que preservam a sua estrutura. O conceito de categoria generaliza estas teorias.

Definição 4.1.1. *Uma **categoria** $\mathbf{C}$ é um quádruplo* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \mathrm{hom}, id, \circ)$*, onde*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *é uma classe a cujos elementos se dá a designação de **objetos de** $\mathbf{C}$,*
- hom *é uma correspondência que a cada par (A, B) de objetos de $\mathbf{C}$ associa um conjunto $\mathrm{hom}(A, B)$ a cujos elementos chamamos morfismos de A em B,*
- id *é uma correspondência que a cada objecto A de $\mathbf{C}$ associa um morfismo id_A de A em A, designado por **morfismo identidade em** A,*
- $\circ$ *é uma correspondência que a cada par (f, g) de morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \in \mathrm{hom}(A, B)$ e $g \in \mathrm{hom}(B, C)$, associa um único morfismo $g \circ f \in \mathrm{hom}(A, C)$, designado **composição de** g **com** f,*

e que satisfaz as seguintes condições:

(C1) *para quaisquer $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, se $(A, B) \neq (C, D)$, então*

$$\mathrm{hom}(A, B) \cap \mathrm{hom}(C, D) = \emptyset,$$

(C2) *(identidade) para quaisquer* $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *e para quaisquer morfismos* $f \in \hom(A, B)$ *e* $g \in \hom(C, A)$*,*

$$f \circ id_A = f \quad e \quad id_A \circ g = g;$$

(C3) *(associatividade) para quaisquer* $A, B, C, D \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ *e para quaisquer morfismos* $f \in \hom(A, B)$*,* $g \in \hom(B, C)$ *e* $h \in \hom(C, D)$*,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Representamos por $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ a classe dos morfismos de $\mathbf{C}$, i.e.,

$$\mathrm{Mor}(\mathbf{C}) = \bigcup_{A,B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})} \hom(A, B).$$

A um elemento de $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ dá-se a designação de $\mathbf{C}$-morfismo. Note-se que dados objetos A e B de uma categoria $\mathbf{C}$, pode não existir qualquer morfismo de A em B (se $A \neq B$) ou podem existir vários. Além disso, de (C1) resulta que a cada morfismo f de $\mathbf{C}$ estão univocamente associados dois objetos $dom(f)$ e $cod(f)$, designados respetivamente por ***domínio*** e ***codomínio*** de f. Escrevemos

$$f : A \to B \quad ou \quad A \xrightarrow{f} B$$

para indicar que $A = dom(f)$ e $B = cod(f)$;
Da definição anterior também resulta que a cada objeto A de $\mathbf{C}$ está associado um único morfismo identidade. De facto, se h e id_A são dois morfismos identidade de A, então $h = h \circ id_A = id_A$.

Exemplos de categorias

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de categorias, algumas das quais associadas a estruturas matemáticas bem conhecidas.

(i) A categoria **Pfn**: $\mathrm{Obj}(\mathbf{Pfn})$ é a classe de todos os conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações parciais de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações parciais. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(ii) A categoria **Set**: $\mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ é a classe de todos os conjuntos. Se X e Y são conjuntos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(iii) A categoria **FinSet**: $\mathrm{Obj}(\mathbf{FinSet})$ é a classe de todos os conjuntos finitos. Se X e Y são conjuntos finitos, define-se $\hom(X, Y)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações de X em Y. A composição de morfismos é a composição usual de funções. Se X é um conjunto, então id_X é a aplicação identidade em X.

(iv) A categoria **Sgp**: Obj(**Sgp**) é a classe de todos os semigrupos. Dados semigrupos S e U, define-se $\hom(S, U)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de semigrupo de S em U. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um semigrupo, então id_S é o morfismo identidade.

(v) A categoria **Mon**: Obj(**Mon**) é a classe de todos os monóides. Dados monóides S e T, define-se $\hom(S, T)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de S em T. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se S é um monóide, então id_S é o morfismo identidade.

(vi) A categoria **Grp**: Obj(**Grp**) é a classe de todos os grupos. Dados grupos G e H, define-se $\hom(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo, então id_G é o morfismo identidade.

(vii) A categoria **AbGrp**: Obj(**AbGrp**) é a classe de todos os grupos abelianos. Dados grupos abelianos G e H, define-se $\hom(G, H)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de grupo de G em H. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se G é um grupo abeliano, então id_G é o morfismo identidade.

(viii) A categoria **Rng**: Obj(**Rng**) é a classe de todos os anéis. Dados anéis A e B, define-se $\hom(A, B)$ como sendo o conjunto de todos os homomorfismos de anel de A em B. A composição de morfismos é a composição usual de homomorfismos. Se A é um anel, então id_A é o morfismo identidade.

(ix) A categoria $\mathbf{Vect}_K$: Obj($\mathbf{Vect}_K$) é a classe de todos os espaços vetoriais sobre um corpo K. Dados espaços vetoriais U e V sobre K, $\hom(U, V)$ é o conjunto de todas as transformações lineares de U em V. A composição de morfismos é a composição usual de transformações lineares. Se V é um espaço vetorial sobre K, id_V é a transformação linear identidade.

(x) A categoria **Poset**: Obj(**Poset**) é a classe de todos os conjuntos parcialmente ordenados. Dados conjuntos parcialmente ordenados P e Q, define-se $\hom(P, Q)$ como sendo o conjunto de todas as aplicações isótonas de P em Q. A composição de morfismos é a composição usual de aplicações. Dado um conjunto parcialmente ordenado P, id_P é a aplicação identidade em P.

As categorias anteriores são exemplos de categorias designadas por ***categorias concretas***, isto é, tratam-se de categorias cujos objetos são conjuntos (possivelmente com algum tipo de estrutura) e cujos morfismos são funções (que eventualmente preservam a estrutura do conjunto). A classe formada por estas categorias é importante, mas existem outras categorias, também relevantes, nas quais os objetos não têm de ser necessariamente conjuntos e os morfismos nem sempre são funções. No caso particular das categorias finitas que a seguir se definem, os objetos podem ser qualquer objeto matemático ou identidade física e os morfismos não têm de ser necessariamente funções.

(xi) A categoria **0**: É a categoria sem objetos e sem morfismos.

(xii) A categoria **1**: A categoria que tem um único objeto e um único morfismo (o morfismo identidade associado ao único objeto da categoria).

(xiii) A categoria **2**: A categoria que tem dois objetos, dois morfismos identidade e um morfismo de um objeto no outro.

(xiv) A categoria **3**: A categoria que tem três objetos (designemo-los por $\star$, $\bullet$ e $*$), três morfismos identidade e outros três morfismos $f : \star \to \bullet$, $g : \star \to *$ e $h : * \to \bullet$ tais que $f = h \circ g$.

Graficamente, as categorias **1**, **2** e **3** podem ser representadas por

$$\begin{tikzcd} \star \arrow[loop above, "id_\star"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \star \arrow[loop left, "id_\star"] \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[loop right, "id_\bullet"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & * \arrow[loop above, "id_*"] \arrow[dr, "h"] & \\ \star \arrow[loop left, "id_\star"] \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"] & & \bullet \arrow[loop right, "id_\bullet"] \end{tikzcd}$$

(xv) Todo o conjunto X pode ser visto como uma categoria $\mathbf{Dis}(X)$: os objetos de $\mathbf{Dis}(X)$ são os elementos de X e os únicos morfismos são os morfismos identidade (um para cada elemento $x \in X$).

(xvi) Todo o grupo $\mathbf{G} = (G; \cdot, ^{-1}, 1)$ também pode ser encarado como uma categoria: o único objeto da categoria é o grupo $\mathbf{G}$; os morfismos de $\mathbf{G}$ são os elementos de G, o morfismo identidade $id_{\mathbf{G}}$ é a identidade de G e a composição de morfismos é a operação binária do grupo.

(xvii) A categoria **Rel**: Obj(**Rel**) é a classe de todos os conjuntos. Dados conjuntos A e B, um morfismo de A em B é um subconjunto de $A \times B$ e, portanto, $\hom(A, B)$ é o conjunto de todas as relações binárias de A em B. Dado um conjunto A, o morfismo identidade em A é a relação identidade em A, $id_A = \{(a, a) : a \in A\}$. A composição de morfismos é a composição usual de relações binárias, isto é, dadas duas relações binárias $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq C \times D$,

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times D \mid \exists\, b \in B \cap C, (a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in S\}.$$

Uma categoria **C** diz-se:

- ***pequena*** se existe uma bijeção entre Mor(**C**) e algum conjunto;
- ***magra*** se para quaisquer $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $|\hom(A, B)| \leq 1$;
- ***discreta*** se os únicos morfismos de **C** são os morfismos identidade.

Exemplo 4.1.2.

(1) Dado um conjunto X, a categoria $\mathbf{Dis}(X)$ é discreta e magra.

*(2) As categorias **1** e **2** são exemplos de categorias pequenas. O monóide $(\mathbb{N}; \cdot, 1)$, visto como uma categoria, também é exemplo de uma categoria pequena.*

4.2 Diagramas

A descrição de certas categorias e a prova de propriedades sobre objetos e morfismos de uma dada categoria pode tornar-se extremamente complexa. No sentido de facilitar tais descrições e a prova de determinados argumentos a respeito de categorias, é usual o recurso a representações gráficas designadas por diagramas.

Um **diagrama** numa categoria **C** é um grafo orientado cujos vértices representam objetos da categoria e cujas arestas orientadas representam morfismos da mesma categoria. Se uma aresta representa um morfismo com domínio A e codomínio B, então o vértice origem e o vértice destino da aresta representam, respetivamente, os objetos A e B. Os vértices e as arestas do diagrama podem ser identificados, respetivamente, pelos nomes dos objetos e pelos nomes dos morfismos aos quais estão associados.

Um diagrama pode ser usado para representar uma categoria ou pode representar apenas uma parte dos objetos e dos morfismos que definem a categoria.

Por exemplo, o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ f"] \arrow[rrr, bend left=70, "h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right=50, "h \circ g"'] & C \arrow[loop below, "id_C"] \arrow[r, "h"'] & D \arrow[loop right, "id_D"]
\end{tikzcd}$$

representa uma categoria com quatro objetos e dez morfismos. Note-se que, para cada objeto $X \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo id_X e, para quaisquer morfismos $s \in \hom(X, Y)$ e $t \in \hom(Y, Z)$, com $X, Y, Z \in \{A, B, C, D\}$, existe um morfismo $t \circ s \in \hom(X, Z)$.

A representação do diagrama de uma categoria pode ser simplificada suprimindo a representação de alguns morfismos. Com efeito, caso se assuma que um determinado diagrama representa uma categoria, os morfismos identidade podem ser omitidos, uma vez que é garantido que estes existem. Assim, o diagrama seguinte

$$\star \xrightarrow{f} \bullet$$

pode ser usado para representar a categoria **2**. Note-se, porém, que no caso de morfismos resultantes da composição de outros dois é necessário que fique claro qual o morfismo respeitante à composição. Por exemplo, no caso dos diagramas seguintes

$$\star \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} *$$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dr, "h"] & \\ \star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "f"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & * \arrow[dr, "h"] & \\ \star \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "l"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

o primeiro diagrama não representa uma categoria, uma vez que não há qualquer morfismo que possa corresponder ao morfismo $g \circ f$. No caso do segundo diagrama, caso se assuma que este diagrama representa uma categoria, tem de se considerar $f = h \circ g$. No último caso, este diagrama não será considerado a representação de uma categoria, a não ser que se identifique qual dos morfismos l ou f corresponde ao morfismo $h \circ g$.

O recurso a diagramas para estabelecer propriedades a respeito de categorias é bastante usual; tais propriedades são geralmente expressas dizendo que um determinado diagrama comuta. Dado um diagrama numa categoria $\mathbf{C}$ diz-se que o ***diagrama comuta*** se, para qualquer par (A, B) de objetos do diagrama e para qualquer par $((f_1, f_2, \ldots, f_n), (g_1, g_2, \ldots, g_m))$ de caminhos de A a B, em que $m, n \in \mathbb{N}$ e pelo menos um dos caminhos tem comprimento superior a 1, tem-se $f_n \circ \ldots f_2 \circ f_1 = g_m \circ \ldots g_2 \circ g_1$.

Por exemplo, quando se afirma que o diagrama a seguir representado comuta

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dd, "h"] \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & \\ & \bullet \end{tikzcd}$$

tal significa que $h \circ f = k$. No caso do diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "g"] & \\ \bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}$$

diz-se que este diagrama comuta se $g \circ f = l \circ k$.

4.3 Construção de categorias

Seguidamente estudam-se alguns processos que permitem, a partir de categorias dadas, construir novas categorias.

Alguns processos usuais na construção de novas estruturas matemáticas a partir de estruturas dadas consistem na formação de subestruturas, na formação de produtos de estruturas e na construção de estruturas quociente.

Definição 4.3.1. *Sendo* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *e* $\mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \hom_{\mathbf{S}}, id^{\mathbf{S}}, \circ^{\mathbf{S}})$ *categorias, diz-se que a categoria* $\mathbf{S}$ *é uma* **subcategoria** *de* $\mathbf{C}$ *se:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{S}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*;*
- *todo o morfismo de* $\mathbf{S}$ *é um morfismo de* $\mathbf{C}$*;*
- *para qualquer* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$*, o morfismo* $id_A^{\mathbf{S}}$ *é o mesmo que o morfismo* $id_A^{\mathbf{C}}$*;*
- *para quaisquer* $\mathbf{S}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to D$*, o morfismo* $g \circ^{\mathbf{S}} f$ *é mesmo que o morfismo* $g \circ^{\mathbf{C}} f$*.*

Exemplo 4.3.2.

(1) **Set** *é uma subcategoria de* **Pfn***.*

(2) **FinSet** *é uma subcategoria de* **Set***.*

(3) **AbGrp** *é uma subcategoria de* **Grp***.*

Definição 4.3.3. *Uma subcategoria* $\mathbf{S} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{S}), \hom_{\mathbf{S}}, id^{\mathbf{S}}, \circ^{\mathbf{S}})$ *de uma categoria* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *diz-se uma* ***subcategoria plena*** *de* $\mathbf{C}$ *se, para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{S})$*,* $\hom_{\mathbf{S}}(A, B) = \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$*.*

A construção de produtos de categorias é também um processo simples.

Definição 4.3.4. *Sejam* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *e* $\mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \hom_{\mathbf{D}}, id^{\mathbf{D}}, \circ^{\mathbf{D}})$ *categorias. Designa-se por* ***categoria produto de*** $\mathbf{C}$ ***por*** $\mathbf{D}$*, e representa-se por* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*, a categoria definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *são todos os pares* (A, B)*, onde* A *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* B *é um objecto de* $\mathbf{D}$*;*
- *dados objetos* (A, B) *e* (A', B') *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*, os morfismos de* (A, B) *em* (A', B') *são os pares de morfismos* (f, g)*, onde* f *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo de* A *em* A' *e* g *é um* $\mathbf{D}$*-morfismo de* B *em* B'*;*
- *para cada objeto* (A, B) *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$*, o morfismo identidade* $id_{(A,B)}$ *é o par* $(id_A^{\mathbf{C}}, id_B^{\mathbf{D}})$*;*
- *a composição* $(f, g) \circ (f', g')$ *dos morfismos* (f, g) *e* (f', g') *de* $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ *é definida componente a componente, isto é,* $(f, g) \circ (f', g') = (f \circ^{\mathbf{C}} f', g \circ^{\mathbf{D}} g')$*.*

Exemplo 4.3.5. *Considerando grupos* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{H}$ *como categorias, o produto de categorias* $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ *corresponde ao usual produto direto de grupos.*

No sentido de definir categorias quociente, começamos por definir o que se entende por *congruência* nos morfismos de uma categoria.

Definição 4.3.6. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Uma relação de equivalência* $\sim$ *definida em* $\mathrm{Mor}(\mathbf{C})$ *diz-se uma* **congruência** *em* $\mathbf{C}$ *se, para quaisquer* $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*,*

(1) $f \sim g$ *implica* $\mathrm{dom} f = \mathrm{dom}\, g$ *e* $\mathrm{cod} f = \mathrm{cod}\, g$*;*

(2) $f \sim g$ *implica* $j \circ f \circ i \sim j \circ g \circ i$*, para todos os morfismos* $i : A \to X$ *e* $j : Y \to B$*, onde* $\mathrm{dom} f = X = \mathrm{dom}\, g$ *e* $\mathrm{cod} f = Y = \mathrm{cod}\, g$*.*

Dado $f \in \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*, representamos por* $[f]$ *a classe de equivalência de* f*.*

Definição 4.3.7. *Sejam* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *uma categoria e* $\sim$ *uma congruência em* $\mathbf{C}$*. Designa-se por* ***categoria quociente****, e representa-se por* $\mathbf{C}/\!\sim$*, a categoria* $\mathbf{C}/\!\sim = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/\!\sim), \hom_{\mathbf{C}/\sim}, id^{\mathbf{C}/\sim}, \circ^{\mathbf{C}/\sim})$ *definida do seguinte modo:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}/\!\sim) = \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*;*
- *os morfismos de* $\mathbf{C}/\!\sim$ *são as classes de equivalência* $[f]$ *de todos os morfismos* f *de* $\mathbf{C}$ *(o domínio e o codomomínio de* $[f]$ *correspondem ao domínio e codomínio de* f*, respetivamente);*
- *para cada objeto* A *de* $\mathbf{C}/\!\sim$*, o morfismo identidade* $id_A^{\mathbf{C}/\sim}$ *é* $[id_A^{\mathbf{C}}]$*;*
- *a composição* $[g] \circ^{\mathbf{C}/\sim} [f]$ *dos morfismos* $[f]$ *e* $[g]$ *é o morfismo* $[g \circ^{\mathbf{C}} f]$*.*

Um processo bastante simples, mas particularmente importante, que permite a construção de uma categoria a partir de uma categoria dada consiste em "trocar o sentido dos morfismos". A categoria obtida por este processo, cuja definição formal se apresenta a seguir, designa-se por *categoria dual* da categoria dada.

Definição 4.3.8. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Designa-se por* ***categorial dual*** *ou* ***categoria oposta*** *de* $\mathbf{C}$*, e representa-se por* $\mathbf{C}^{op}$*, a categoria definida do seguinte modo:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$*;*
- *para quaisquer* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{op})$*,* $f : A \to B$ *é um morfismo de* $\mathbf{C}^{op}$ *se e só se* $f : B \to A$ *é um morfismo de* $\mathbf{C}$*;*
- *os morfismos identidade de* $\mathbf{C}^{op}$ *são os morfismos identidade de* $\mathbf{C}$*;*
- *a composição* $g \circ f$ *de morfismos em* $\mathbf{C}^{op}$ *é definida como sendo* $f \circ g$ *em* $\mathbf{C}$*.*

Da definição anterior é imediato que $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$. Assim, toda a categoria é a dual de alguma categoria e toda a definição da teoria de categorias pode ser reformulada numa definição na categoria dual. Cada afirmação S sobre categorias pode ser transformada numa afirmação dual S^{op}, trocando as palavras "domínio" e "codomínio" e substituindo cada ocorrência de $f \circ g$ por $g \circ f$. Se S é uma afirmação verdadeira a respeito de uma categoria $\mathbf{C}$, então S^{op} é uma afirmação verdadeira a respeito de $\mathbf{C}^{op}$. Por conseguinte, é válido o princípio seguinte.

Princípio da dualidade: Se S é uma afirmação verdadeira para todas as categorias, então S^{op} também é uma afirmação verdadeira para todas as categorias.

Embora existam casos em que uma dada categoria e a sua categoria dual sejam a mesma, como é o caso das categorias $\mathbf{Rel}$ e $\mathbf{Rel}^{op}$, em geral a categoria dual de uma determinada categoria $\mathbf{C}$ é uma nova categoria, tal como acontece com as categorias $\mathbf{Set}$ e $\mathbf{Set}^{op}$. Note-se que um morfismo $f : A \to B$ de $\mathbf{Set}^{op}$ é um morfismo $f : B \to A$ de $\mathbf{Set}$ e, portanto, $f : B \to A$ é uma função de B em A, porém, o morfismo $f : A \to B$ em $\mathbf{Set}^{op}$ não é necessariamente uma função.

Apresentam-se seguidamente mais dois processos de construção que permitem a formação de categorias cujos objetos são morfismos de uma dada categoria.

Definição 4.3.9. *Sejam* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *uma categoria e* I *um objeto de* $\mathbf{C}$*. Designa-se por* ***categoria dos objetos sobre*** I*, e representa-se por* $\mathbf{C/I}$*, a categoria* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C/I}), \hom_{\mathbf{C/I}}, id^{\mathbf{C/I}}, \circ^{\mathbf{C/I}})$ *definida do seguinte modo:*

- *os objetos de* $\mathbf{C/I}$ *são todos os morfismos de* $\mathbf{C}$ *com codomínio* I*;*
- *dados objetos* f *e* g *de* $\mathbf{C/I}$ *(isto é, dados* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to I$ *e* $g : B \to I$*), um* $\mathbf{C/I}$*-morfismo de* f *em* g *é um triplo de morfismos* (f, j, g)*, onde* j *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo de* A *em* B *tal que* $g \circ^{\mathbf{C}} j = f$*;*
- *para cada objeto* $f : A \to I$ *de* $\mathbf{C/I}$*, o morfismo identidade* $id_f^{\mathbf{C/I}}$ *é o triplo de* $\mathbf{C}$*-morfismos* (f, id_A, f)*;*
- *a composição* $(f_2, h, f_3) \circ (f_1, g, f_2)$ *dos morfismos* $(f_1, g, f_2) : f_1 \to f_2$ *e* $(f_2, h, f_3) : f_2 \to f_3$ *de* $\mathbf{C}/I$ *é o morfismo* $(f_1, h \circ^{\mathbf{C}} g, f_3) : f_1 \to f_3$*.*

Dualmente, define-se $\mathbf{I/C}$, a ***categoria dos objetos sob*** I.

Definição 4.3.10. *Seja* $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ *uma categoria. Designa-se por* ***categoria dos*** $\mathbf{C}$***-morfismos*** *e representa-se por* $\mathbf{C}^{\to}$*, a categoria* $(\mathrm{Obj}(\mathbf{C}^{\to}), \hom_{\mathbf{C}^{\to}}, id^{\mathbf{C}^{\to}}, \circ^{\mathbf{C}^{\to}})$ *definida do seguinte modo:*

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{C}) = \mathrm{Mor}(\mathbf{C})$*;*
- *dados objetos* f_1*,* f_2 *de* $\mathbf{C}^{\to}$ *(isto é, dados* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f_1 : X_1 \to Y_1$ *e* $f_2 : X_2 \to Y_2$*), um morfismo de* f_1 *em* f_2 *é um par (*$j : X_1 \to X_2$*,* $k : Y_1 \to Y_2$*) de* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que* $f_2 \circ^{\mathbf{C}} j = k \circ^{\mathbf{C}} f_1$*;*
- *para qualquer* $\mathbf{C}^{\to}$*-objeto* $f : X \to Y$*, o morfismo identidade* $id_f^{\mathbf{C}^{\to}}$ *é o par* $(id_X^{\mathbf{C}}, id_Y^{\mathbf{C}})$*;*
- *a composição* $(j', k') \circ (j, k)$ *dos morfismos* $(j, k) : f_1 \to f_2$ *e* $(j', k') : f_2 \to f_3$ *é o morfismo* $(j' \circ^{\mathbf{C}} j, k' \circ^{\mathbf{C}} k) : f_1 \to f_3$*.*

4.4 Morfismos especiais

No estudo de conjuntos e funções têm especial destaque as funções que satisfazem propriedades tais como injetividade, sobrejetividade e bijetividade. Tais propriedades motivaram a definição de conceitos análogos para morfismos de categorias.

Definição 4.4.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.
Um morfismo $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* **monomorfismo** *se* f *é* **cancelável à esquerda**, *i.e., se para quaisquer morfismos* $g, h : C \to A$,

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h.$$

Um monomorfismo f *de* A *em* B *também se diz uma* ***inclusão*** *de* A *em* B *e é usualmente representado por* $f : A \rightarrowtail B$ *ou* $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.
Caso exista um monomorfismo de A *em* B, *então* A *diz-se um* ***subobjeto de*** B *e escreve-se* $A \subset B$.

É simples perceber que o conceito de monomorfismo surge como uma abstração da noção de função injetiva. De facto, a respeito de monomorfismos e de funções injetivas na categoria **Set**, prova-se o resultado seguinte.

Proposição 4.4.2. *Na categoria* **Set**, *os monomorfismos são exatamente as aplicações injetivas.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ uma função injetiva e sejam $g, h : C \to A$ funções tais que $f \circ g = f \circ h$. Então tem-se necessariamente $g = h$. Com efeito, se admitirmos que $g \neq h$, existe $c \in C$ tal que $g(c) \neq h(c)$ e, uma vez que f é injetiva, segue que $f(g(c)) \neq f(h(c))$, o que contradiz $f \circ g = f \circ h$.
Reciprocamente, admitamos que $f : A \to B$ é um monomorfismo. Sejam $a, a' \in A$ tais que $a \neq a'$. No sentido de provar que $f(a) \neq f(a')$, consideremos um conjunto singular $\{x\}$ e as funções

$$\begin{array}{rccc} \overline{a}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \overline{a'}: & \{x\} & \to & A \\ & x & \mapsto & a' \end{array}.$$

Uma vez que $\overline{a} \neq \overline{a'}$ e f é um monomorfismo, então $f \circ \overline{a} \neq f \circ \overline{a'}$. Assim,

$$f(a) = (f \circ \overline{a})(x) \neq (f \circ \overline{a'})(x) = f(a').$$

Logo f é injetiva. □

Tal como acontece na categoria **Set**, em muitas outras categorias nas quais os morfismos são funções verifica-se que os monomorfismos são exatamente as funções injetivas; tal acontece, por exemplo, em muitas categorias de "conjuntos estruturados" tais como as categorias **Grp**, **Rng**, $\mathbf{Vect}_K$. Porém, existem categorias cujos morfismos são funções, mas em que estes dois conceitos não coincidem. De facto, embora da demonstração anterior seja claro que numa categoria concreta todas as funções injetivas são monomorfismos, existem categorias cujos morfismos são funções e nas quais a classe dos monomorfismos não coincide com a classe das funções injetivas.

Definição 4.4.3. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$.
Um morfismo $f : A \to B$ *de* $\mathbf{C}$ *diz-se um* **epimorfismo** *se* f *é* **cancelável à direita**, *i.e., se para quaisquer morfismos* $g, h : B \to C$,

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h.$$

Um epimorfismo f *de* A *em* B *é usualmente representado por* $f : A \twoheadrightarrow B$ *ou* $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$. *Caso exista um epimorfismo de* A *em* B, *diz-se que* B *é um* ***objeto quociente*** *de* A.

A noção de epimorfismo é dual da noção de monomorfismo. Assim, um morfismo f é um epimorfismo numa categoria $\mathbf{C}$ se e só se f é um monomorfismo na categoria dual $\mathbf{C}^{op}$.

O conceito de epimorfismo surge como uma abstração do conceito de função sobrejetiva e na categoria **Set** verifica-se o seguinte.

Proposição 4.4.4. *Os epimorfismos na categoria* **Set** *são exatamente as funções sobrejetivas.*

Demonstração. Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetiva e $g, h : B \to C$ funções tais que $g \neq h$. Então, para algum $b \in B$, $g(b) \neq h(b)$ e, uma vez que f é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Assim, $g(f(a)) \neq h(f(a))$ e, portanto, $g \circ f \neq h \circ f$. Logo f é um epimorfismo.
Reciprocamente, suponhamos que $f : A \to B$ não é uma função sobrejetiva. Então existe $b \in B$ tal que, para todo $a \in A$, $b \neq f(a)$. No sentido de provar que f não é um epimorfismo, consideremos duas funções $g, h : B \to \{0, 1\}$ definidas da seguinte forma:

(i) $g(a) = h(a) = 0$, para todo $a \in B$ tal que $a \neq b$,

(ii) $g(b) = 0$,

(iii) $h(b) = 1$.

Então $g \circ f = h \circ f$, mas $g \neq h$ e, portanto, f não é um epimorfismo. □

Da prova anterior segue que numa categoria concreta todo o morfismo sobrejetivo é um epimorfismo. Porém, a implicação contrária não é em geral verdade. De facto, embora na categoria **Set** os epimorfismos coincidam com as funções sobrejetivas, tal não é em geral verdade para outras categorias cujos morfismos são funções.

Exemplo 4.4.5. *Na categoria* **Mon**, *consideremos os monóides* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *e* $(\mathbb{N}_0, +, 0)$. *A função de inclusão* $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, *que a cada inteiro não negativo* z *associa o inteiro* z, *é um monomorfismo. Esta função também é um epimorfismo, pois assumindo que* g *e* h *são dois morfismos do monóide* $(\mathbb{Z}; +, 0)$ *num monóide* $(E; *, 1_E)$ *tais que* $g \circ i = h \circ i$, *prova-se que* $g = h$. *De facto, se* $z \geq 0$, *então* $i(z) = z$, *donde segue* *que* $h(z) = h(i(z)) = g(i(z)) = g(z)$. *Se* $z < 0$, *então* $-z > 0$, *pelo que* $-z \in \mathbb{N}_0$ *e, portanto,*

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z) * 1_E \\ &= g(z) * h(0) \\ &= g(z) * h(-z+z) \\ &= g(z) * (h(-z) * h(z)) \\ &= g(z) * (h(i(-z)) * h(z)) \\ &= g(z) * (g(i(-z)) * h(z)) \\ &= (g(z) * g(i(-z))) * h(z) \\ &= (g(z) * g(-z)) * h(z) \\ &= g(z + (-z)) * h(z) \\ &= g(0) * h(z) \\ &= 1_E * h(z) \\ &= h(z). \end{aligned}$$

Uma vez que $g(z) = h(z)$, *para todo* $z \in \mathbb{Z}$, *tem-se* $g = h$ *e, portanto,* i *é um epimorfismo. No entanto, a função* i *não é sobrejetiva.*

Proposição 4.4.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$, $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Então:*

(1) *Para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$, id_A *é um monomorfismo e um epimorfismo.*

(2) *Se* f *e* g *são monomorfismos (respetivamente, epimorfismos), então* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo), então* f *é um monomorfismo (respetivamente,* g *é um epimorfismo).*

Demonstração. (1) Trivial.

(2) Suponhamos que f e g são monomorfismos. Sejam $i : D \to A$ e $j : D \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$. Pretendemos mostrar que $i = j$. Ora, assumindo que $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$, então, por associatividade, tem-se $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$. Uma vez que g é um monomorfismo, segue que $f \circ i = f \circ j$. Por último, atendendo a que f é um monomorfismo tem-se $i = j$.

De forma similar prova-se que se f e g são epimorfismos, então $g \circ f$ é um epimorfismo.

(3) Suponhamos que $g \circ f$ é um monomorfismo. Pretendemos mostrar que, para quaisquer $i : D \to A$ e $j : D \to A$, se $f \circ i = f \circ j$, então $i = j$. De facto, se $f \circ i = f \circ j$, então $g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j)$. Por conseguinte, $(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j$ e atendendo a que $g \circ f$ é um monomorfismo vem que $i = j$.

De forma análoga prova-se que se $g \circ f$ é um epimorfismo, então g é um epimorfismo. □

Definição 4.4.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria. Um* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *diz-se um* ***bimorfismo*** *se é simultanemente um monomorfismo e um epimorfismo.*

Apresentam-se de seguida mais alguns tipos especiais de morfismos.

Definição 4.4.8. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *um morfismo de* $\mathbf{C}$. *Diz-se que:*

- f *é **invertível à direita** se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $f \circ g = id_B$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um **um inverso direito** de* f.

- f *é **invertível à esquerda** se existe um morfismo* $g : B \to A$ *de* $\mathbf{C}$ *tal que* $g \circ f = id_A$*; neste caso, o morfismo* g *diz-se um **um inverso esquerdo** de* f.

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$. Então $f : B \to A$ e $g : A \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}^{op}$. Assim, se $g \circ f = id_A$ em $\mathbf{C}$, tem-se $f \circ g = id_A$ em $\mathbf{C}^{op}$. Por conseguinte, os conceitos de inverso direito e inverso esquerdo são duais.

Com base na definição anterior é simples estabelecer o resultado seguinte, cuja prova fica ao cuidado do leitor.

Proposição 4.4.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$.

(1) *Para todo* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A *é invertível à direita e à esquerda.*

(2) *Se* f *e* g *são invertíveis à direita (respetivamente, esquerda), então* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda).*

(3) *Se* $g \circ f$ *é invertível à direita (respetivamente, esquerda), então* g *é invertível à direita (respetivamente,* f *é invertível à esquerda).*

Observe-se que existem morfismos que podem não ter qualquer inverso esquerdo; por exemplo, na categoria **Set**, a função $f : \{0,1\} \to \{1\}$ definida por $f(0) = f(1) = 1$ não tem inverso esquerdo. Verifica-se também que um mesmo morfismo pode ter mais do que um inverso esquerdo; se consideramos na categoria **Set** a função $f : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, então os morfismos $g, h : \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ definidas por $g(0) = g(2) = 0$, $g(1) = 1$ e $h(0) = 0$, $h(1) = h(2) = 1$ são ambos inversos esquerdos de f. Pelo Princípio de Dualidade, um morfismo pode também não ter qualquer inverso direito ou pode ter vários. Na categoria **Set** é, no entanto, possível garantir a existência de inverso esquerdo e inverso direito para certos morfismos.

Proposição 4.4.10. *Na categoria* **Set**, *todo o monomorfismo com domínio não vazio é invertível à esquerda e todo o epimorfismo é invertível à direita.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um monomorfismo com domínio não vazio. Então $A \neq \emptyset$ e f é injetiva. Por conseguinte, é possível definir uma função $g : B \to A$ da seguinte forma: $g(f(a)) = a$, para todo $a \in A$ e $g(b) = a_0$, se $b \notin f(A)$, onde a_0 é um elemento fixo em A. A função g é um inverso esquerdo de f.

Se $f : A \to B$ é um epimorfismo, então f é sobrejetiva. Neste caso, pode definir-se uma função $h : B \to A$ da seguinte forma: para todo $b \in B$, $h(b) = a$, onde a é um elemento fixo em A tal que $f(a) = b$. Esta função h é um inverso direito de f. Note-se que se f não é injetiva, este inverso não é único. □

O resultado anterior não é válido em todas as categorias, ou seja, nem todo o monomorfismo é um morfismo invertível à esquerda e nem todo o epimorfismo é invertível à direita. Por exemplo, na categoria **2**, o único morfismo de um objeto no outro é um epimorfismo e um monomorfismo, mas não tem nem inverso direito nem inverso esquerdo.

Proposição 4.4.11. *Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria $\mathbf{C}$.*

(1) *Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.*

(2) *Se f é invertível à direita, então f é um epimorfismo.*

Demonstração. (1) Suponhamos que f é invertível à esquerda. Então f tem um inverso esquerdo, isto é, existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por conseguinte, para quaisquer morfismos $i, j : C \to A$

$$\begin{array}{rll} f \circ i = f \circ j & \Rightarrow \; g \circ (f \circ i) = g \circ (f \circ j) & \\ & \Rightarrow \; (g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j & \text{(por associatividade)} \\ & \Rightarrow \; id_A \circ i = id_A \circ j & (g \text{ é inverso esquerdo de } f) \\ & \Rightarrow \; i = j & \end{array}$$

(2) Imediato por dualidade. □

Proposição 4.4.12. *Seja $f : A \to B$ um morfismo numa categoria $\mathbf{C}$. Se $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f, então $g = h$.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$ tal que $g : B \to A$ é um inverso direito de f e $h : B \to A$ é um inverso esquerdo de f. Então

$$g = id_A \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ id_B = h.$$ □

Definição 4.4.13. *Um morfismo $f : A \to B$ de uma categoria $\mathbf{C}$ diz-se um* ***isomorfismo*** *ou um* ***morfismo invertível*** *se é simultaneamente invertível à direita e à esquerda. Um isomorfismo f de A em B é usualmente representado por $f : A \xrightarrow{\sim} B$.*

Exemplo 4.4.14.
(1) *Na categoria* **Set**, *os isomorfismos são exatamente as funções bijetivas.*
(2) *Na categoria* **Grp**, *os isomorfismos são os homomorfismos de grupo bijetivos.*

Dos resultados que se estabelecem a seguir é imediato que caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B também existe um isomorfismo de B em A. Assim, caso exista um isomorfismo de um objeto A num objeto B diz-se apenas que os objetos A e B são isomorfos e escreve-se $A \cong B$.

Proposição 4.4.15. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria.*

(1) *Para todo* $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, id_A *é um isomorfismo.*

(2) *Se* $f : A \to B$ *é um isomorfismo, então existe um único morfismo* $g : B \to A$ *tal que* $g \circ f = id_A$ *e* $f \circ g = id_B$.

Demonstração. Imediato a partir das proposições 4.4.9 e 4.4.12. □

Definição 4.4.16. *Seja* $f : A \to B$ *um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$. *Designa-se por* ***inverso de*** f, *e representa-se por* f^{-1}, *o único morfismo* $f^{-1} : B \to A$ *tal que* $f^{-1} \circ f = id_A$ *e* $f \circ f^{-1} = id_B$.

Proposição 4.4.17. *Se* $f : A \to B$ *é um isomorfismo numa categoria* $\mathbf{C}$, *então* $f^{-1} : B \to A$ *também é um isomorfismo.*

Demonstração. Imediato a partir da proposição anterior. □

A prova do resultado seguinte é um exercício simples que fica ao cuidado do leitor.

Proposição 4.4.18. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *isomorfismos numa categoria* $\mathbf{C}$. *Então* $g \circ f$ *é um isomorfismo e o seu inverso é* $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Proposição 4.4.19. *Seja* $f : A \to B$ *um morfismo numa categoria* $\mathbf{C}$. *Se* f *é um monomorfismo (respetivamente, epimorfismo) e é invertível à direita (respetivamente, invertível à esquerda), então* f *é um isomorfismo.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$ um monomorfismo invertível à direita. Então existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Logo $(f \circ g) \circ f = id_B \circ f = f$, donde $f \circ (g \circ f) = f \circ id_A$. Por conseguinte, atendendo a que f é um monomorfismo, tem-se $g \circ f = id_A$. Assim, g é simultaneamente um inverso direito e um inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo.

Dualmente, se $f : A \to B$ é um epimorfismo invertível à esquerda, então f é um isomorfismo. □

Observe-se que da Proposição 4.4.11 é imediato que todo o isomorfismo é um bimorfismo. Contudo, um bimorfismo não é necessariamente um isomorfismo. Já apresentámos anteriormente um exemplo desta situação na categoria **2**. Na categoria **Mon** também é possível encontrar bimorfismos que não são isomorfismos. De facto, $(\mathbb{N}_0, +, 0)$ e $(\mathbb{Z}, +, 0)$ são objetos desta categoria e a função $i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, que a cada inteiro não negativo z associa o respetivo inteiro z, não é invertível, mas é um monomorfismo e um epimorfismo.

Definição 4.4.20. *Uma categoria* **C** *diz-se* ***equilibrada*** *se todo o bimorfismo é um isomorfismo.*

Exemplo 4.4.21. *A categoria* **Set** *é equilibrada, mas a categoria* **Mon** *não é.*

4.5 Objetos iniciais, objetos terminais

Nesta secção consideram-se caracterizações abstratas do conjunto vazio e dos conjuntos singulares da categoria **Set** e de outros objetos estruturalmente similares existentes em outras categorias.

Definição 4.5.1. *Seja* **C** *uma categoria.*

- *Um objeto I de* **C** *diz-se um* ***objeto inicial*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $I \to X$.*

- *Um objeto T de* **C** *diz-se um* ***objeto terminal*** *se, para qualquer objeto X de* **C**, *existe um, e um só, morfismo $X \to T$.*

Exemplo 4.5.2.

(1) *Na categoria* **Set**, *o conjunto vazio é um objeto inicial e qualquer conjunto singular $\{x\}$ é um objeto terminal. Note-se que a categoria* **Set** *tem um único objeto inicial e tem vários objetos terminais.*

(2) *Na categoria* **Grp**, *um grupo trivial é um objeto inicial e terminal.*

(3) *Na categoria* **Poset**, *qualquer c.p.o. $(\{x\}, \{(x, x)\})$ é um objeto terminal.*

(4) *Considerando o c.p.o. $(\mathbb{N}_0, \leq)$ como uma categoria, o inteiro zero é o único objeto inicial e não existem objetos terminais. O c.p.o. $(\mathbb{Z}, \leq)$ não tem objetos iniciais nem objetos terminais.*

(5) *Um c.p.o., encarado como uma categoria, tem objeto inicial se e só se tem elemento mínimo e tem objeto terminal se e só se tem elemento máximo.*

Os exemplos anteriores permitem perceber que certas categorias não têm qualquer objeto inicial nem qualquer objeto terminal e que existem categorias que podem ter vários objetos iniciais ou vários objetos terminais. Caso uma categoria tenha mais do que um objeto inicial (respetivamente, terminal) prova-se que este é único a menos de isomorfismo.

Proposição 4.5.3. *Os objetos iniciais (respetivamente, terminais) de uma categoria* $\mathbf{C}$*, caso existam, são únicos a menos de isomorfismo. Reciprocamente, se* I *é um objeto inicial (respetivamente, terminal) e* $I \cong J$*, então* J *é um objeto inicial (respetivamente, terminal).*

Demonstração. Se I e J são objetos iniciais numa categoria $\mathbf{C}$, então existem morfismos únicos $f : I \to J$ e $g : J \to I$. Por conseguinte, $g \circ f$ é um morfismo de I em I. O morfismo identidade id_I também é um morfismo de I em I. Mas, atendendo a que I é um objeto inicial, existe um único morfismo de I em I; logo $g \circ f = id_I$. De modo análogo, tem-se $f \circ g = id_J$. Logo g é inverso direito e inverso esquerdo de f e, portanto, f é um isomorfismo. Assim, $I \cong J$.
Reciprocamente, sejam I e J objetos de $\mathbf{C}$ tais que I é um objeto inicial e $I \cong J$. Então existe um isomorfismo $i : I \to J$ e, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $f : I \to X$. Logo, existe um morfismo $f \circ i^{-1} : J \to X$ e prova-se que este é o único $\mathbf{C}$-morfismo de J em X. De facto, se $g : J \to X$ é um morfismo em $\mathbf{C}$, tem-se $g \circ i : I \to X$ e, por conseguinte, $g \circ i = f$. Logo $g = f \circ i^{-1}$. Assim, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $J \to X$ e, portanto, J é um objeto inicial de $\mathbf{C}$.

Dualmente, prova-se o resultado a respeito de objetos terminais. □

Nos exemplos anteriores verificou-se que um mesmo objeto pode ser simultaneamente inicial e terminal.

Definição 4.5.4. *Um objecto* 0 *de uma categoria* $\mathbf{C}$ *que seja simultaneamente inicial e terminal diz-se um* ***objeto zero****.*

Note-se que uma categoria pode ter objetos iniciais e objetos terminais e não ter objeto zero. Por exemplo, a categoria **Set** não tem objeto zero. A categoria representada pelo diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[loop above, "id_C"] & \\
A \arrow[ur, "h \circ f = g"] \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[loop left, "id_A"] & & B \arrow[ul, "h"'] \arrow[ll, shift left, "f'"] \arrow[loop right, "id_B"]
\end{tikzcd}$$

também é exemplo de uma categoria com objetos iniciais (A e B), com um objeto final (C) e que não tem objeto zero.

Se $\mathbf{C}$ é uma categoria com objeto zero 0, então, para quaisquer objetos A e B existem, a menos de isomorfismo, morfismos únicos $\xi_A : A \to 0$ e $\xi^B : 0 \to B$. Considerando a composição $\xi^B \circ \xi_A : A \to B$, prova-se que este morfismo depende apenas de A e B e não depende de 0.

Proposição 4.5.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* 0 *e* $0'$ *objetos zero e* A*,* B *objetos de* $\mathbf{C}$*. Então o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\xi^B"] & B \\ A \arrow[u, "\xi_A"] \arrow[r, "\xi'_A"'] & 0' \arrow[u, "\xi'^B"'] \end{tikzcd}$$

i.e., $\xi^B \circ \xi_A = \xi'^B \circ \xi'_A$.

Demonstração. Como 0 e $0'$ são objetos zero, existe um isomorfismo entre eles. Seja $f : 0 \to 0'$ esse isomorfismo. Então

$$f \circ \xi_A = \xi'_A \quad \text{e} \quad \xi'^B \circ f = \xi^B,$$

donde

$$\xi_A = f^{-1} \circ \xi'_A \quad \text{e} \quad \xi^B = \xi'^B \circ f.$$

Logo

$$\xi^B \circ \xi_A = (\xi'^B \circ f) \circ (f^{-1} \circ \xi'_A) = \xi'^B \circ (f \circ f^{-1}) \circ \xi'_A = \xi'^B \circ \xi'_A. \qquad \square$$

A proposição anterior garante que numa categoria com objeto zero, para quaisquer dois objetos A e B da categoria, existe um único morfismo nulo de A em B.

Definição 4.5.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* 0 *um objeto zero de* $\mathbf{C}$*,* A *e* B *objetos de* $\mathbf{C}$*,* $\xi_A : A \to 0$ *o único morfismo de* A *em* 0 *e* $\xi^B : 0 \to B$ *o único morfismo de* 0 *em* B*. Designa-se por* ***morfismo nulo*** *de* A *em* B*, e representa-se por* $0_{A,B}$*, o morfismo* $\xi^B \circ \xi_A$.

Exemplo 4.5.7. *Na categoria* **Grp***, se* H *e* G *são grupos,* $\{1_G\}$ *é um objeto zero e o morfismo*

$$\begin{array}{rcl} 0_{H,G} : H & \to & G \\ x & \mapsto & 1_G \end{array}$$

é o morfismo nulo de H *em* G.

Proposição 4.5.8. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria com objeto zero. A composta de um morfismo nulo com qualquer outro morfismo é ainda um morfismo nulo.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, 0 um objeto zero de $\mathbf{C}$, A, B, C objetos de $\mathbf{C}$ e $f : C \to A$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Então

$$\begin{array}{rcl} 0_{A,B} \circ f & = & (\xi^B \circ \xi_A) \circ f \\ & = & \xi^B \circ (\xi_A \circ f) \\ & = & \xi^B \circ \xi_C \\ & = & 0_{C,B} \end{array}$$

$\square$

4.6 Produtos e coprodutos

As noções que a seguir se apresentam permitem caracterizar de forma abstrata conceitos bem conhecidos tais como produto cartesiano de conjuntos, produto direto de álgebras e união disjunta de conjuntos.

Definição 4.6.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A_1, A_2 *objetos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***produto de*** A_1 ***e*** A_2 *a um par* $(P, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$, *onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $p_1 : P \to A_1$ *e* $p_2 : P \to A_2$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* S *de* $\mathbf{C}$ *e para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f_1 : S \to A_1$ *e* $f_2 : S \to A_2$, *existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $u : S \to P$ *tal que* $p_1 \circ u = f_1$ *e* $p_2 \circ u = f_2$, *i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A_2
\end{tikzcd}$$

O morfismo p_i *designa-se por* ***projeção de índice*** i.

Exemplo 4.6.2.

(1) *Na categoria* **Set**, *o par* $(A_1 \times A_2, (p_1, p_2))$, *onde* $A_1 \times A_2$ *é o produto cartesiano dos conjuntos* A_1 *e* A_2 *e* $p_i : A_1 \times A_2 \to A_i$, $i \in \{1, 2\}$, *é a projeção-i, é um produto dos objetos* A_1 *e* A_2.

(2) *Na categoria* **Grp**, *o par* $(\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, (p_1, p_2))$, *onde* $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ *é o produto direto dos grupos* $\mathcal{G}_1$ *e* $\mathcal{G}_2$ *e* $p_i : G_1 \times G_2 \to G_i$, $i \in \{1, 2\}$, *é a projeção-i, é um produto dos objetos* $\mathcal{G}_1$ *e* $\mathcal{G}_2$.

(3) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado* P *como uma categoria, o produto de dois elementos* $p, q \in P$ *é um elemento* $p \times q \in P$, *juntamente com projeções*

$$p \times q \leq p$$
$$p \times q \leq q$$

tais que, para qualquer elemento $s \in P$, *se*

$$s \leq p \text{ e } s \leq q,$$

então $s \leq p \times q$; *ou seja,* $p \times q$ *é o ínfimo de* $\{p, q\}$.

Proposição 4.6.3. *O produto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A_1, A_2 objetos de $\mathbf{C}$ e $(P, (p_i)_{i\in\{1,2\}})$ e $(Q, (q_i)_{i\in\{1,2\}})$ produtos de A_1 e A_2. Então, uma vez que Q é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $i : P \to Q$ tal que $q_1 \circ i = p_1$ e $q_2 \circ i = p_2$. De forma análoga, como P é um produto de A_1 e A_2, existe um único morfismo $j : Q \to P$ tal que $p_1 \circ j = q_1$ e $p_2 \circ j = q_2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[d, "i"] & \\
A_1 & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] \arrow[d, "j"] & A_2 \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Assim, $p_1 \circ j \circ i = p_1$ e $p_2 \circ j \circ i = p_2$. Por conseguinte, atendendo a que $p_1 \circ id_P = p_1$ e $p_2 \circ id_P = p_2$, resulta da condição de unicidade que $j \circ i = id_P$. De forma similar prova-se que $i \circ j = id_Q$. Logo $i : P \to Q$ é um isomorfimo. $\square$

Nas condições da definição anterior, e caso exista o produto dos objetos A_1 e A_2, o objeto P é usualmente representado por $A_1 \times A_2$ e o morfismo u, univocamente determinado pelos morfismos f_1, f_2, é representado por $< f_1, f_2 >$.

O conceito de produto de dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ pode ser generalizado a famílias de objetos de $\mathbf{C}$.

Definição 4.6.4. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $(A_i)_{i\in I}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***produto de*** $(A_i)_{i\in I}$ *a um par* $(P, (p_i)_{i\in I})$*, onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $p_i : P \to A_i$*,* $i \in I$*, são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* S *de* $\mathbf{C}$ *e para cada família* $\{f_i : S \to A_i\}_{i\in I}$ *de* $\mathbf{C}$*-morfismos, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $u : S \to P$ *tal que* $p_i \circ u = f_i$*, para todo* $i \in I$*.*

Nas condições da definição anterior, se $|I| = n$ para algum $n \in \mathbb{N}_0$, o produto $(P, (p_i)_{i\in I})$ diz-se ***n-ário***; em particular, se $|I| = 0, 1, 2$ ou 3 o produto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Observe-se que os produtos nulários de uma categoria coincidem com os objetos terminais. De facto, se $(P; (p_i)_{i\in\emptyset})$ é um produto de uma família $(A_i)_{i\in\emptyset}$ de objetos de uma categoria $\mathbf{C}$, então P é um objeto de $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer objeto S de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $u : S \to P$. Reciprocamente, se P é um objeto terminal, então $(P; (p_i)_{i\in\emptyset})$ é um produto nulário.

Os produtos unários existem para qualquer objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$; de facto, $(A, (id_A))$ é um produto de (A).

Definição 4.6.5. *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família finita de objetos tem produto, diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem produtos finitos****. Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família de objetos tem produto, diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem produtos****.*

Dualmente, define-se coproduto de dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$.

Definição 4.6.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* A_1, A_2 *objetos de* $\mathbf{C}$. *Chama-se* ***coproduto de*** A_1 ***e*** A_2 *a um par* $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$, *onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_1 : A_1 \to Q$ *e* $i_2 : A_2 \to Q$ *são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* Z *de* $\mathbf{C}$ *e para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $g_1 : A_1 \to Z$ *e* $g_2 : A_2 \to Z$, *existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_1 = g_1$ *e* $v \circ i_2 = g_2$, *i.e., tal que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & Q \arrow[u, "v"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

O morfismo i_j *designa-se por* ***injeção de índice*** j.

Proposição 4.6.7. *O coproduto de dois objetos de uma categoria é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Segue por dualidade da prova apresentada para a Proposição 4.6.3. □

Caso exista o coproduto $(Q, (i_j)_{j\in\{1,2\}})$ de dois objetos A_1 e A_2 de uma categoria $\mathbf{C}$, o objeto Q é usualmente representado por $A_1 + A_2$ e o morfismo v referido na definição anterior, univocamente determinado pelos morfismos g_1 e g_2, é representado por $[g_1, g_2]$.

Exemplo 4.6.8.
(1) *Na categoria* **Set**, *o coproduto de dois conjuntos* A_1 *e* A_2 *corresponde à sua união disjunta, onde* $A_1 + A_2$ *pode ser definido, por exemplo, por*

$$A_1 + A_2 = \{(a, 1) : a \in A_1\} \cup \{(a, 2) \,|\, a \in A_2\}$$

e cujas funções injeção são naturalmente definidas por

$$i_1(a) = (a, 1) \text{ e } i_2(a) = (a, 2).$$

Dadas funções g_1 *e* g_2 *nas condições descritas no diagrama seguinte*

$$\begin{tikzcd} & Z & \\ A_1 \arrow[ur, "g_1"] \arrow[r, "i_1"'] & A_1 + A_2 \arrow[u, "{[g_1, g_2]}"] & A_2 \arrow[ul, "g_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

define-se

$$[g_1, g_2](x, \delta) = \begin{cases} g_1(x) & \textit{se } \delta = 1 \\ g_2(x) & \textit{se } \delta = 2 \end{cases}$$

Então, se $h : A_1 + A_2 \to Z$ *é uma função tal que* $h \circ i_1 = g_1$ *e* $h \circ i_2 = g_2$*, tem-se* $h(x, \delta) = [g_1, g_2](x, \delta)$*, para qualquer* $(x, \delta) \in A_1 + A_2$*.*

(2) *Considerando um conjunto parcialmente ordenado* P *como uma categoria, o coproduto de dois elementos* $p, q \in P$ *é um elemento* $p + q \in P$*, juntamente com injeções*

$$p \leq p + q$$
$$q \leq p + q$$

tais que, para qualquer elemento $z \in P$*, se*

$$p \leq z \text{ e } q \leq z,$$

então $p + q \leq z$*; ou seja,* $p + q$ *é o supremo de* $\{p, q\}$*.*

De forma análoga ao que foi feito no caso dos produtos, a noção de coproduto pode ser generalizada a famílias arbitrárias de objetos.

Definição 4.6.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $(A_j)_{j \in J}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***coproduto de*** $(A_j)_{j \in J}$ *a um par* $(Q; (i_j)_{j \in J})$*, onde* Q *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i_j : A_j \to Q$*,* $j \in J$*, são* $\mathbf{C}$*-morfismos tais que, para cada objeto* Z *de* $\mathbf{C}$ *e para cada família* $\{g_j : A_j \to Z\}_{j \in J}$ *de* $\mathbf{C}$*-morfismos, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : Q \to Z$ *tal que* $v \circ i_j = g_j$*, para todo* $j \in J$*.*

Um coproduto $(Q, (q_i)_{i \in J})$ diz-se n-***ário*** se $|J| = n$, com $n \in \mathbb{N}_0$; se $|J| = 0, 1, 2$ ou 3 o coproduto diz-se ***nulário***, ***unário***, ***binário*** ou ***ternário***, respetivamente.

Dualmente ao que sucede nos produtos, os coprodutos nulários de uma categoria coincidem com os objetos iniciais e os coprodutos unários também existem para qualquer objeto A de uma categoria $\mathbf{C}$.

Definição 4.6.10. *Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família finita de objetos tem coproduto diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem coprodutos finitos****. Se* $\mathbf{C}$ *é uma categoria em que toda a família de objetos tem coproduto diz-se que* $\mathbf{C}$ ***tem coprodutos****.*

4.7 Igualizadores e coigualizadores

A noção de igualizador generaliza conceitos tais como o de kernel de um homomorfismo de grupo e a noção de coigualizador generaliza o conceito de conjunto quociente por uma relação de equivalência.

Definição 4.7.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Um par* (I, i)*, onde* I *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo, diz-se um* **igualizador de** f **e** g *se:*

(i) $f \circ i = g \circ i$;

(ii) para qualquer $\mathbf{C}$*-morfismo* $i' : I' \to A$ *tal que* $f \circ i' = g \circ i'$*, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $u : I' \to I$ *tal que* $i \circ u = i'$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ I' \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & & \end{tikzcd}$$

Definição 4.7.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* I *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* (I, i) *é um* ***igualizador*** *em* $\mathbf{C}$ *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (I, i) *é um igualizador de* f *e* g*.*
Diz-se que a categoria $\mathbf{C}$ *t****em igualizadores*** *se para qualquer par de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um igualizador.*

Exemplo 4.7.3.
(1) *Na categoria* **Set***, sejam* $f, g : A \to B$ *funções e seja* $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$*. Então o par* (I, i)*, onde* i *é a função inclusão de* I *em* A

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f *e* g*.*

(2) *Na categoria* **Grp***, sejam* $\mathcal{G}_1 = (G_1; \cdot, ^{-1}, 1_{G_1})$ *e* $\mathcal{G}_2 = (G_2; \cdot, ^{-1}, 1_{G_2})$ *grupos,* $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *um homomorfismo de grupos,* $\phi : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ *o homomorfismo trivial (i.e., o homomorfismo que a cada elemento de* G_1 *associa o elemento neutro de* G_2*) e seja* $I = \{x \in G_1 : f(x) = \phi(x) = 1_{G_2}\}$*. Então o par* (I, i)*, onde* i *é a função inclusão de* I *em* G_1

$$\begin{array}{rcl} i : I & \to & G_1 \\ x & \mapsto & x \end{array},$$

é um igualizador de f *e* ϕ*.*

Proposição 4.7.4. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *morfismos de uma categoria* $\mathbf{C}$*. Se* $(I, i : I \to A)$ *e* $(I', i' : I' \to A)$ *são igualizadores de* f *e* g*, então* I *e* I' *são isomorfos.*

Demonstração. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$, $(I, i : I \to A)$ e $(I', i' : I' \to A)$ igualizadores de f e g. Uma vez que (I, i) é um igualizador de f e g, tem-se $f \circ i = g \circ i$. Então, atendendo a que (I', i') também é um igualizador de f e g, existe um, e um só, morfismo $u : I \to I'$ tal que $i' \circ u = i$. Considerando que (I', i') é um igualizador de f e g, também se tem $f \circ i' = g \circ i'$. Logo, como (I, i) é um igualizador de f e g, existe um, e um só morfismo $v : I' \to I$ tal que $i \circ v = i'$. Além disso, como (I, i) é um igualizador de f e g, sabe-se que existe um, e um só, morfismo $w : I \to I$ tal que $i \circ w = i$, esse morfismo é o morfismo id_I. Uma vez que $v \circ u$ é um morfismo de I em I e $i \circ (v \circ u) = i$, segue que $v \circ u = id_I$. De modo análogo prova-se que $i \circ v = id_{I'}$. Assim, u é invertível à direita e à esquerda e, portanto, u é um isomorfismo de I' em I. Logo I e I' são isomorfos. $\square$

Proposição 4.7.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A *e* I *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Se* (I, i) *é um igualizador em* $\mathbf{C}$*, então* i *é um monomorfismo.*

Demonstração. Seja $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$. Então existem $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : A \to B$ tais que (I, i) é um igualizador de f e g. Pretendemos mostrar que i é um monomorfismo, ou seja, que para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $k : C \to I$ e $h : C \to I$,

$$i \circ k = i \circ h \Rightarrow k = h.$$

De facto, se $k : C \to A$ e $h : C \to A$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $i \circ k = i \circ h$ e se considerarmos $z = i \circ k = i \circ h$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, shift left, "k"] \arrow[u, shift right, "h"'] \arrow[ur, "z"'] & & \end{tikzcd}$$

tem-se

$$f \circ z = f \circ (i \circ k) = (f \circ i) \circ k = (g \circ i) \circ k = g \circ (i \circ k) = g \circ z.$$

Mas (I, i) é um igualizador de f e g, pelo que existe um único morfismo $u : C \to I$ tal que $i \circ u = z$. Então, como $i \circ k = i \circ h = z$ resulta que $k = h = u$. Logo i é um monomorfismo. □

Proposição 4.7.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* A *e* I *objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $i : I \to A$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Se* (I, i) *é um igualizador em* $\mathbf{C}$ *e* i *é um epimorfismo, então* i *é um isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $(I, i : I \to A)$ um igualizador em $\mathbf{C}$ e $f : A \to B$ e $g : A \to B$ morfismos dos quais (I, i) é um igualizador. Então $f \circ i = g \circ i$. Se i é um epimorfismo segue que $f = g$, donde $f \circ id_A = g \circ id_A$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f = g"] & B \\ A \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "id_A"'] & & \end{tikzcd}$$

Atendendo a que (I, i) é um igualizador de f e g, existe um único morfismo $u : A \to I$ tal que $i \circ u = id_A$, donde resulta que $i \circ u \circ i = id_A \circ i = i = i \circ id_I$. Então, como todo o igualizador é um monomorfismo, segue que $u \circ i = id_I$. Logo u é um inverso direito e um inverso esquerdo de i e, portanto, i é um isomorfismo. □

Definição 4.7.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria com objeto zero* 0*,* N *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : A \to B$ *um* $\mathbf{C}$*-morfismo. Diz-se que* N *é um* ***núcleo de f*** *(ou um* ***kernel de*** f*) se existe algum* $\mathbf{C}$*-morfismo* $i : N \to A$ *tal que* (N, i) *é um igualizador de* f *e* $0_{A,B}$*.*

Da definição anterior resulta imediatamente que dois núcleos de um mesmo morfismo $f : A \to B$ são isomorfos. O nucleo de f (kernel de f) é, usualmente, representado por $\mathrm{Nuc}f$ (ou $\ker f$).

Proposição 4.7.8. *Se $f : A \to B$ é um monomorfismo numa categoria com objeto zero* 0, *então* $\mathrm{Nuc}f = 0$.

Demonstração. Se $f : A \to B$ é um monomorfismo prova-se que $(0, \xi^A : 0 \to A)$ é igualizador de f e $0_{A,B}$. De facto, como 0 é objeto inicial e $f \circ \xi^A$ e $0_{A,B} \circ \xi^A$ são morfismos de 0 em B, tem-se

$$f \circ \xi^A = 0_{A,B} \circ \xi^A.$$

Além disso, se admitirmos que $i' : K \to A$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que

$$f \circ i' = 0_{A,B} \circ i',$$

i.e., é tal que

$$f \circ i' = 0_{K,B},$$

prova-se que existe um unico morfismo $u : K \to 0$ tal que $\xi^A \circ u = i'$. Com efeito, de

$$f \circ i' = 0_{K,B} \quad \text{e} \quad f \circ 0_{K,A} = 0_{K,B},$$

vem que

$$f \circ i' = f \circ 0_{K,A},$$

pelo que $i' = 0_{K,A}$, pois f é um monomorfismo. Então existe $u = \xi_K$ tal que $\xi^A \circ u = i'$. Note-se que u só pode ser ξ_K, uma vez que 0 é objeto terminal.

Assim, $(0, \xi^A)$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$ e, portanto, $\mathrm{Nuc}f = 0$. □

Considerando o dual da definição de igualizador tem-se a noção de coigualizador.

Definição 4.7.9. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f, g : A \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$. *Um par* (K, k), *onde* K *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *é um* $\mathbf{C}$*-morfismo, diz-se um* ***coigualizador de*** f **e** g *se:*

(i) $k \circ f = k \circ g$;

(ii) para qualquer $\mathbf{C}$*-morfismo* $k' : B \to K'$ *tal que* $k' \circ f = k' \circ g$, *existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $v : K \to K'$ *tal que* $v \circ k = k'$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "k'"'] & K \arrow[d, "v"] \\
 & & K'
\end{tikzcd}$$

Definição 4.7.10. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* (K, k) *é um* ***coigualizador*** *em* $\mathbf{C}$ *se existem morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *tais que* (K, k) *é um coigualizador de* f *e* g*.*
Diz-se que a categoria $\mathbf{C}$ ***tem coigualizadores*** *se para qualquer par de* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f, g : A \to B$ *existe um coigualizador.*

Sendo o conceito de coigualizador dual da noção de igualizador, são imediatos os resultados seguintes.

Proposição 4.7.11. *Sejam* $f : A \to B$ *e* $g : A \to B$ *morfismos de uma categoria* $\mathbf{C}$*. Se* $(K, k : B \to K)$ *e* $(K', k' : B \to K')$ *são coigualizadores de* f *e* g*, então* K *e* K' *são isomorfos.*

Demonstração. Imediato por dualidade da Proposição 4.7.4. □

Proposição 4.7.12. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$*, então* k *é um epimorfismo.*

Demonstração. Imediato por dualidade da Proposição 4.7.5. □

Proposição 4.7.13. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $k : B \to K$ *um morfismo em* $\mathbf{C}$*. Se* (K, k) *é um coigualizador em* $\mathbf{C}$ *e* k *é um monomorfismo, então* k *é um isomorfismo.*

Demonstração. Imediato por dualidade da Proposição 4.7.6. □

Exemplo 4.7.14. *Na categoria* **Set***, sejam* X *um conjunto,* $R \subseteq X \times X$ *uma relação de equivalência em* X *e considere-se o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "r_2"] & \\ X & X \times X \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

onde r_1 *e* r_2 *são as funções de* R *em* X *definidas por*

$$\begin{array}{rccc} r_1: & R & \to & X \\ & (a,b) & \mapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} r_2: & R & \to & X \\ & (a,b) & \mapsto & b \end{array}$$

e p_1 *e* p_2 *são as projeções de* $X \times X$ *em* X*. Então a aplicação natural*

$$\begin{array}{rccc} \pi_R: & X & \to & X/R \\ & x & \mapsto & [x]_R \end{array}$$

é um coigualizador de r_1 *e* r_2*. De facto, para qualquer* $(x, y) \in R$*, tem-se*

$$(\pi_R \circ r_1)(x,y) = \pi_R(r_1(x,y)) = \pi_R(x) = [x]_R,$$
$$(\pi_R \circ r_2)(x,y) = \pi_R(r_2(x,y)) = \pi_R(y) = [y]_R,$$

pelo que $(\pi_R \circ r_1)(x,y) = (\pi_R \circ r_2)(x,y)$, *pois* $[x]_R = [y]_R$. *Logo* $\pi_R \circ r_1 = \pi_r \circ r_2$. *Além disso, para qualquer* $f : X \to Y$ *tal que* $f \circ r_1 = f \circ r_2$, *existe uma única aplicação* $\overline{f} : X/R \to Y$ *tal que* $\overline{f} \circ \pi_R = f$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] & X \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[dr, "f"'] & X/R \arrow[d, "\overline{f}"] \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

De facto, a correspondência $\overline{f}$ *de* X/R *em* X *definida por* $\overline{f}([x]_R) = f(x)$, *para qualquer* $[x]_R \in X/R$, *é uma aplicação nas condições indicadas. Comecemos por verificar que* $\overline{f}$ *é uma aplicação. Para todo* $[x]_R \in X/R$, *é imediato que* $\overline{f}([x]_R) \in Y$, *pois* $\overline{f}([x]_R) = f(x)$ *e* f *é uma aplicação de* X *em* Y. *Além disso, para quaisquer* $[x]_R, [y]_R \in X/R$, *se* $[x]_R = [y]_R$, *tem-se* $(x,y) \in R$, *pelo que*

$$\begin{array}{rcl}
\overline{f}([x]_R) & = & f(x) \\
 & = & f(r_1(x,y)) \\
 & = & (f \circ r_1)(x,y) \\
 & = & (f \circ r_2)(x,y) \\
 & = & f(r_2(x,y)) \\
 & = & f(y) \\
 & = & \overline{f}([y]_R).
\end{array}$$

Logo $\overline{f}$ *é uma aplicação.*
Facilmente também se verifica que $\overline{f} \circ \pi_R = f$. *Com efeito, as aplicações* $\overline{f} \circ \pi_R$ *e* f *têm o mesmo domínio e o mesmo conjunto de chegada e, para qualquer* $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl}
(\overline{f} \circ \pi_R)(x) & = & \overline{f}(\pi_R(x)) \\
 & = & \overline{f}([x]_R) \\
 & = & f(x).
\end{array}$$

Falta provar a unicidade de $\overline{f}$. *Ora, se* $\overline{g} : X/R \to Y$ *é uma aplicação tal que* $\overline{g} \circ \pi_R = f$, *vem que* $\overline{f} \circ \pi_R = \overline{g} \circ \pi_R$ *e uma vez que* π_R *é sobrejetiva resulta que* $\overline{g} = \overline{f}$.

De um modo geral, as relações de equivalência permitem construir coigualizadores para duas aplicações arbitrárias $f, g : X \to Y$. *De facto, considerando a menor relação de equivalência* R *que contém*

$$S = \{(f(x), g(x)) \mid x \in X\},$$

prova-se que $(Y/R, \pi_R : Y \to Y/R)$ *é um coigualizador de* f *e* g.

Definição 4.7.15. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria com objeto zero* 0*,* K *um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f : A \to B$ *um morfismo de* $\mathbf{C}$*. Diz-se que* K *é um* ***conúcleo de f*** *(ou um* ***cokernel de*** f*) se existe um* $\mathbf{C}$*-morfismo* $k : B \to K$ *tal que* (K, k) *é um coigualizador de* f *e* $0_{A,B}$*.*

O conceito de conúcleo é dual do conceito de núcleo, pelo que os resultados estabelecidos para núcleos podem ser dualizados para conúcleos.

4.8 Produto fibrado e soma amalgamada

O conceito de produto fibrado, frequentemente utilizado em matemática, generaliza conceitos tais como o de interseção e de imagem inversa. A noção de soma amalgada é a noção dual de produto fibrado.

Definição 4.8.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to C$ *e* $g : B \to C$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***produto fibrado*** *de* (f, g) *(ou* ***pullback*** *de* (f, g)*) a um par* $(P, (f', g'))$*, onde* P *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f' : P \to A$ *e* $g' : P \to B$ *são morfismos de* $\mathbf{C}$ *tais que*

(i) $f \circ f' = g \circ g'$*, i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

(ii) *para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $i : X \to A$ *e* $j : X \to B$ *tais que* $f \circ i = g \circ j$*, existe um único* $\mathbf{C}$*-morfismo* $k : X \to P$ *tal que* $i = f' \circ k$ *e* $j = g' \circ k$*.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\ & P \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Se $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g), o diagrama apresentado na alínea (i) da definição anterior diz-se um ***quadrado de produto fibrado*** ou ***quadrado cartesiano.***

Diz-se que uma categoria **C tem produtos fibrados** se existe produto fibrado para qualquer par de morfismos que tenham o mesmo codomínio.

Se $(O, (f', g'))$ e $(Q, (f'', g''))$ são produtos fibrados de (f, g), onde $f : A \to C$ e e $g : B \to C$ são morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$, então O e Q são isomorfos. A prova deste resultado, que é deixada ao cuidado do leitor, é semelhante às provas apresentadas para as proposições 4.6.3 e 4.7.4.

Proposição 4.8.2. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Se $(O, (f', g'))$ e $(Q, (f'', g''))$ são produtos fibrados de (f, g), então O e Q são isomorfos.*

Exemplo 4.8.3.

(1) *Na categoria* **Set**, *sejam A, B, C conjuntos e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ funções. Então o produto fibrado de (f, g) é o par $(P, (f', g'))$, onde*

$$P = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\}$$

e $f' : P \to A$ e $g' : P \to B$ são as funções definidas, para todo $(a, b) \in P$, por

$$f'(a, b) = a \ \text{ e } \ g'(a, b) = b.$$

(2) *Nas condições do exemplo anterior se consideramos que $A, B \subseteq C$ e que f e g são, respetivamente, as funções inclusão $i_1 : A \to C$ e $i_2 : B \to C$, tem-se*

$$\begin{aligned} P = \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, f(a) = g(b)\} &= \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, i_1(a) = i_2(b)\} \\ &= \{(a, b) \,|\, a \in A, b \in B, a = b\} \end{aligned}$$

e, portanto, $P \cong A \cap B$.

(3) *Se em* (1) *tomarmos $B = C$ e $g = id_B$, então*

$$\begin{aligned} P = \{(a, c) \,|\, a \in A, c \in C, f(a) = g(c)\} &= P = \{(a, c) \,|\, a \in A, c \in C, f(a) = c)\} \\ &\cong \{a \in A \,|\, \exists c \in C, f(a) = c\} \\ &= f^{\leftarrow}(C). \end{aligned}$$

Proposição 4.8.4. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\ X_1 \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

um quadrado cartesiano. Se f é um monomorfismo, então j também o é.

Demonstração. Suponhamos que $u, v : B \to A$ são dois morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $j \circ u = j \circ v$. Então

$$\begin{aligned} f \circ (i \circ u) &= (f \circ i) \circ u &&= (g \circ j) \circ u \\ &= g \circ (j \circ u) &&= g \circ (j \circ v) \\ &= (g \circ j) \circ v &&= (f \circ i) \circ v \\ &= f \circ (i \circ v) \end{aligned}$$

donde segue que $i \circ u = i \circ v$, uma vez que f é um monomorfismo. Assim, o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, shift left, "u"] \arrow[dr, shift right, "v"'] \arrow[drr, "j \circ u = j \circ v"] \arrow[ddr, "i \circ u = i \circ v"'] & & \\
& A \arrow[r, "j"'] \arrow[d, "i"'] & X_2 \arrow[d, "g"] \\
& X_1 \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

é comutativo, o que implica $u = v$. Logo j é um monomorfismo. $\square$

Proposição 4.8.5. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : A \to B$ *um morfismo de* $\mathbf{C}$. *Então as afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) f *é um monomorfismo.*

(2) O diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "id_A"] \arrow[d, "id_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

é um quadrado cartesiano.

(3) Existe um objeto X *e um morfismo* $g : X \to A$ *tal que o diagrama seguinte*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

é um quadrado cartesiano.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos que $f : A \to B$ é um monomorfismo. Claramente, $f \circ id_A = f \circ id_A$. Além disso, se $i, j : X \to A$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que $f \circ i = f \circ j$, prova-se que existe um e um só morfismo $u : S \to A$ tal que $id_A \circ u = i$ e $id_A \circ u = j$. Com efeito, atendendo a que f é um monomorfismo, de $f \circ i = f \circ j$ segue que $i = j$. Logo existe $u = i = j$ tal que $id_A \circ u = i$ e $id_A \circ u = j$.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u = i"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& A \arrow[r, "id_A"'] \arrow[d, "id_A"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Desta forma, fica provado que $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

(2) $\Rightarrow$ (3) Imediato.

(3) $\Rightarrow$ (1) Admitamos que existe um objeto X e um morfismo $g : X \to A$ tais que $(X, (g, g))$ é um produto fibrado de (f, f). Pretendemos mostrar que f é um monomorfismo. Sejam $i, j : S \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ i = f \circ j$. Então, atendendo a que $(S, (g, g))$ é um produto fibrado de (f, f), existe um e um só morfismo $u : S \to X$ tal que $g \circ u = i$ e $g \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "j"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Logo $i = j$ e, portanto, f é um monomorfismo. $\square$

Dualmente, define-se soma amalgamada de morfismos de uma categoria.

Definição 4.8.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $f : C \to A$ *e* $g : C \to B$ *morfismos de* $\mathbf{C}$*. Chama-se* ***soma amalgamada*** *de* (f, g) *(ou* ***pushout*** *de* (f, g)*) a um par* $(S, (f', g'))$*, onde* S *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $f' : A \to S$ *e* $g' : B \to S$ *são morfismos de* $\mathbf{C}$ *tais que*

(i) $f' \circ f = g' \circ g$*, i.e., tais que o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"] \\
B \arrow[r, "g'"'] & S
\end{tikzcd}$$

(ii) para quaisquer morfismos $i : B \to X$ *e* $j : A \to X$ *tais que* $i \circ g = j \circ f$*, existe um único morfismo* $k : S \to X$ *tal que* $i = k \circ g'$ *e* $j = k \circ f'$*.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "j"] & \\
B \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, "i"'] & S \arrow[dr, "k"] & \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Se $\mathbf{C}$ é uma categoria tal que existe soma amalgamada para qualquer par de morfismos que tenham o mesmo domínio, diz-se que a categoria **C tem somas amalgamadas**.

Os duais de todos os resultados estudados para produtos fibrados são válidos para somas amalgamadas.

4.9 Limites e colimites

Nas secções anteriores definiram-se os conceitos de objeto terminal, produto e igualizador, sendo possível identificar semelhanças nas definições apresentadas. O conceito de limite generaliza o que há de comum nestas noções, pelo que objetos terminais, produtos e igualizadores não são mais do que exemplos de limites. Dualmente define-se colimite, conceito este que que tem os objetos inicias, os coprodutos e os coigualizadores como exemplos.

Definição 4.9.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D. *Um* D***-cone*** *ou* ***cone do diagrama*** D *é um par* $(C, (f_i : C \to D_i)_{i\in I})$, *onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $(f_i : C \to D_i)_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbf{C}$*-morfismos, tal que, para cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $g : D_j \to D_k$ *existente em* D, *o diagrama*

$$\begin{tikzcd} D_j \arrow[rr, "g"] & & D_k \\ & C \arrow[ul, "f_j"] \arrow[ur, "f_k"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $g \circ f_j = f_k$. *Ao objeto* C *dá-se a designação de* ***vértice*** *do cone.*

Note-se que podem existir diversos cones, com vértices distintos, para um mesmo diagrama D.

Definição 4.9.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D. *Um cone* $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ *do diagrama* D *diz-se um* D***-cone limite*** *ou um* ***limite do diagrama*** D *se, para qualquer outro* D*-cone* $(C, (f_i : C \to D_i)_{i\in I})$, *existe um único morfismo* $u : C \to L$ *tal que, para cada* $i \in I$, $\lambda_i \circ u = f_i$, *i.e., tal que cada triângulo de vértices* C, L *e* D_i *comuta.*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right, "f_j"'] \arrow[ddrr, "f_k"] \arrow[ddrrr, "f_l"] & & & \\ L \arrow[d, "\lambda_j"] \arrow[drr, "\lambda_k"] \arrow[drrr, "\lambda_l"] & & & \\ D_j & & D_k & D_l \end{tikzcd}$$

Exemplo 4.9.3.

(1) *Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ e seja D um diagrama em $\mathbf{C}$ formado apenas por dois objetos A e B*

$$A \qquad\qquad B$$

Então um D-cone é um par $(C,(f,g))$, onde C é um objeto de $\mathbf{C}$ e $f : C \to A$ e $g : C \to B$ são $\mathbf{C}$-morfismos.

$$A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$$

Assim, um D-cone limite, caso exista, é um produto de A e B.

(2) *Seja D um diagrama sem objetos e sem morfismos. Então um cone para o diagrama D numa categoria $\mathbf{C}$ é qualquer par $(C,(\,))$, onde C é um objeto de $\mathbf{C}$. Por conseguinte, um D-cone limite é um par $(L,(\,))$, onde L é um objeto de $\mathbf{C}$ tal que, para qualquer outro D-cone $(C,(\,))$ de $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $u : C \to L$, i.e., L é um objeto terminal.*

(3) *Seja D o diagrama*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

com três objetos e dois morfismos. Um D-cone é um par $(P',(f',g',h'))$ onde P' é um objeto de $\mathbf{C}$ e $f' : P \to B$, $g' : P \to A$ e $h' : P \to C$ são $\mathbf{C}$-morfismos tais que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, "h'"] & B \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

i.e., tais que $f \circ f' = h' = g \circ g'$. Se $(P',(f',g',h'))$ é um D-cone limite, então para qualquer outro D-cone $(P'',(f'',g'',h''))$ existe um único morfismo $u : P'' \to P'$ tal que $f'' = f' \circ u$, $g'' = g' \circ u$ e $h'' = h' \circ u$. Assim, $(P',(f',g'))$ é um produto fibrado de (f,g).

Proposição 4.9.4. *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, D um diagrama em $\mathbf{C}$ e $(D_i)_{i\in I}$ a família de objetos de D. Um D-cone limite é único a menos de isomorfismo, i.e., se $(L,(\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ e $(L',(\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ são D-cones limite, então existe um isomorfismo $i : L \to L'$.*

Demonstração. Seja $(L,(\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ um D-cone limite. Então, uma vez que $(L,(\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $u : L \to L$ tal que

$$\text{(i)}\quad \lambda_i \circ u = \lambda_i, \text{ para cada } i \in I,$$

e, atendendo a que $\lambda_i \circ id_L = \lambda_i$, para todo $i \in I$, segue que que $u = id_L$.

Consideremos que $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ também é um D-cone limite. Então, como $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $v : L' \to L'$ tal que

$$\text{(ii)} \quad \lambda'_i \circ v = \lambda'_i, \text{ para cada } i \in I,$$

e, uma vez que $\lambda'_i \circ id'_L = \lambda'_i$, para todo $i \in I$, tem-se $v = id_{L'}$.

Agora, atendendo a que $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone limite e que $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $f : L' \to L$ tal que

$$\text{(iii)} \quad \lambda_i \circ f = \lambda'_i, \text{ para qualquer } i \in I.$$

De forma análoga, como $(L', (\lambda'_i : L' \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone limite e $(L, (\lambda_i : L \to D_i)_{i\in I})$ é um D-cone, existe um único morfismo $g : L \to L'$ tal que

$$\text{(iv)} \quad \lambda'_i \circ g = \lambda_i, \text{ para qualquer } i \in I.$$

Assim, $\lambda_i \circ f \circ g = \lambda_i$, donde $f \circ g = id_L$. De forma similar conclui-se que $g \circ f = id_{L'}$. Logo f é um isomorfismo. □

Diz-se que uma categoria **C tem limites** (respetivamente, **limites finitos**) se todo o diagrama (respetivamente diagrama finito) D admite D-cone limite.

Proposição 4.9.5. *Seja* **C** *uma categoria. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) **C** *tem limites finitos.*

(2) **C** *tem produtos finitos e igualizadores.*

(3) **C** *tem um objeto terminal e produtos fibrados.*

Demonstração. [(1) ⇒ (2)] Suponhamos que **C** tem limites finitos. Pretendemos mostrar que **C** tem produtos finitos e igualizadores.

No sentido de provar que **C** tem produtos finitos, consideremos um diagrama D em **C** formado por uma família finita de objetos $(D_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ e sem morfismos. Ora, por hipótese, existe cone limite do diagrama D, que é o produto $(\prod_{i=1}^{n} D_i, (p_i)_{i\in I})$. Logo **C** tem produtos finitos.

A prova de que **C** tem igualizadores é imediata, uma vez que, dados dois morfismos $f, g : A \to B$ de **C**, o cone limite do diagrama

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

define um igualizador de f e g.

[(2) ⇒ (1)] Admitamos que **C** tem produtos finitos e igualizadores. Pretende-se mostrar que **C** tem limites finitos.

Consideremos, então, um diagrama finito D e seja $(D_i)_{i\in I}$ a família de todos os objetos de D. Designemos por J ($J \subseteq I$) o conjunto dos índices j tais que, para algum objeto D_i de D, existe um morfismo $g : D_i \to D_j$ em D. Por hipótese, existem os produtos $(\prod_{i\in I} D_i, (p_i)_{i\in I})$ e $(\prod_{j\in J} D_j, (p_j)_{j\in J})$. Como $(\prod_{j\in J} D_j, (p_j)_{j\in J})$ é produto, existe um único morfismo $u : \prod_{i\in I} D_i \to \prod_{j\in J} D_j$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} D_i \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p_j"'] & & \prod_{j\in J} D_j \arrow[dl, "p_j"] \\
& D_j &
\end{tikzcd}$$

comuta, para cada $j \in J$, i.e., tal que $p_j \circ u = p_j$. Sejam D_m e D_n, com $m \in I$ e $n \in J$, objetos de D tais que existe $g : D_m \to D_n$. Então, como $(\prod_{j\in J} D_j, (p_j)_{j\in J})$ é produto, existe um único morfismo $v : \prod_{i\in I} D_i \to \prod_{j\in J} D_j$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in I} D_i \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_m"'] & \prod_{j\in J} D_j \arrow[d, "p_n"] \\
D_m \arrow[r, "g"'] & D_n
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $\mathbf{C}$ tem igualizadores, existe um igualizador de u e v. Seja $(L, l : L \to \prod_{i\in I} D_i)$ esse igualizador. A respeito de $(L, (p_i \circ l)_{i\in I})$ prova-se que é um D-cone limite. De facto, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[dl, "p_m \circ l"'] \arrow[dr, "p_n \circ l"] & \\
D_m \arrow[rr, "g"'] & & D_n
\end{tikzcd}$$

é comutativo, pois

$$\begin{aligned}
g \circ (p_m \circ l) &= (g \circ p_m) \circ l = (p_n \circ v) \circ l = p_n \circ (v \circ l) = p_n \circ (u \circ l) \\
&= (p_n \circ u) \circ l = p_n \circ l.
\end{aligned}$$

Além disso, se admitirmos que $(C, (q_i : C \to D_i)_{i\in I})$ é outro D-cone, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "l"] & \prod_{i\in I} D_i \arrow[r, "v"] \arrow[d, "p_m"'] & \prod_{j\in J} D_j \arrow[d, "p_n"] \\
& D_m \arrow[r, "g"] & D_n \\
C \arrow[ur, "q_m"] \arrow[urr, "q_n"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo e, uma vez que $\prod_{i\in I} D_i$ é produto, existe um único morfismo $q : C \to \prod_{i\in I} D_i$ tal que

$$p_m \circ q = q_m \quad \text{e} \quad p_n \circ q = q_n.$$

Atendendo a que $(\prod_{j\in J} D_j, (p_j)_{j\in J})$ é produto, também existe um único morfismo $t : C \to \prod_{j\in J} D_j$ tal que

$$p_n \circ t = q_n.$$

Então, uma vez que o morfismo $v \circ q : C \to \prod_{j\in J} D_j$ satisfaz

$$\begin{aligned} p_n \circ (v \circ q) &= (p_n \circ v) \circ q \\ &= (g \circ p_m) \circ q \\ &= g \circ (p_m \circ q) \\ &= g \circ q_m \\ &= q_n \end{aligned}$$

e para o morfismo $u \circ q : C \to \prod_{j\in J} D_j$ tem-se

$$\begin{aligned} p_n \circ (u \circ q) &= (p_n \circ u) \circ q \\ &= p_n \circ q \\ &= q_n, \end{aligned}$$

segue que

$$u \circ q = t = v \circ q.$$

Mas (L, l) é igualizador de u e v, pelo que

$$\exists^1 s : C \to L : \; l \circ s = q.$$

Assim, para todo o $i \in I$,

$$(p_i \circ l) \circ s = p_i \circ (l \circ s) = p_i \circ q = q_i,$$

i.e., o diagrama

$$\begin{tikzcd} & D_i & \\ L \arrow[ur, "p_i \circ l"] & & C \arrow[ul, "q_i"'] \arrow[ll, "s"] \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Logo $(L, (p_i \circ l)_{i\in I})$ é um D-cone limite.

[(2) $\Rightarrow$ (3)] Suponhamos que **C** tem produtos finitos e igualizadores.

No sentido de provar que **C** tem objetos terminais, considere-se o diagrama D sem objetos (e sem morfismos). Por hipótese, existe o produto da família vazia de objetos de D, que, tal como já vimos anteriormente, é um objeto terminal.

Provemos que também existem produtos fibrados em $\mathbf{C}$. Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Uma vez que existe o produto $(A \times B, (p_A, p_B))$, então $f \circ p_A$ e $g \circ p_B$ são morfismos de $A \times B$ em C. Atendendo a que $\mathbf{C}$ tem igualizadores, existe igualizador de $(f \circ p_A, g \circ p_B)$; seja $(I, i : I \to A \times B)$ esse igualizador. Agora, a respeito de $(F, (p_A \circ i, p_B \circ i))$ prova-se que é produto fibrado de (f, g). De facto,

$$f \circ (p_A \circ i) = (f \circ p_A) \circ i = (g \circ p_B) \circ i = g \circ (p_B \circ i).$$

Além disso, supondo que existem $p : G \to A$ e $q : G \to B$ em $\mathbf{C}$ tais que $f \circ p = g \circ q$, segue que

$$\exists^1 u : G \to A \times B : p_A \circ u = p \ \text{ e } \ p_B \circ u = q,$$

uma vez que $A \times B$ é produto de A e B. Logo

$$\begin{aligned}(f \circ p_A) \circ u \ &= f \circ (p_A \circ u)\\ &= f \circ p\\ &= g \circ q\\ &= g \circ (p_B \circ u)\\ &= (g \circ p_B) \circ u.\end{aligned}$$

Então, uma vez que (I, i) é igualizador de $(f \circ p_A, g \circ p_B)$,

$$\exists^1 v : G \to I : i \circ v = u,$$

e portanto, existe um único morfismo $v : G \to I$ tal que

$$(p_A \circ i) \circ v = p_A \circ (i \circ v) = p_A \circ u = p$$

e

$$(p_B \circ i) \circ v = p_B \circ (i \circ v) = p_B \circ u = q.$$

Logo, $(I, \{p_A \circ i, p_B \circ i\})$ é produto fibrado de (f, g).

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "v"] \arrow[drr, "u"] \arrow[drrr, "q"] \arrow[ddr, "u"'] \arrow[dddr, "p"'] & & & \\
& I \arrow[r, "i"'] \arrow[d, "i"] & A \times B \arrow[r, "p_B"'] & B \arrow[dd, "g"] \\
& A \times B \arrow[d, "p_A"] & & \\
& A \arrow[rr, "f"'] & & C
\end{tikzcd}$$

[(3) ⇒ (2)] Suponhamos que $\mathbf{C}$ tem objeto terminal T e produtos fibrados. Pretendemos mostrar que $\mathbf{C}$ tem produtos finitos e igualizadores.

Comecemos por mostrar que $\mathbf{C}$ tem produtos finitos. Como já observámos anteriormente, para qualquer objeto A de $\mathbf{C}$, $(A, (id_A))$ é produto de (A). Para quaisquer dois objetos A e B de $\mathbf{C}$ também é imediato que existe produto de A e B. De facto, como T é um objeto terminal, para quaisquer objetos A e B de $\mathbf{C}$ existem morfismos $f : A \to T$ e $g : B \to T$ e, atendendo a que $\mathbf{C}$ tem produtos fibrados, existe $(P, (f', g'))$ produto fibrado de (f, g). Facilmente se verifica que $(P, (f', g'))$ é o produto de A e B. Por indução sobre o número de objetos, conclui-se que $\mathbf{C}$ tem produtos finitos.

Mostremos agora que quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : A \to B$ têm igualizador. Como $\mathbf{C}$ tem produtos finitos, existe o produto $(B \times B, (p_1, p_2))$ e, por conseguinte, existe um e um só morfismo $< f, g >: A \to B \times B$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "< f, g >"'] \arrow[dr, "g"] & \\
B & B \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Uma vez que existe o produto $(B \times B, (p_1, p_2)$ também existe um único morfismo $< id_B, id_B >$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "id_B"'] \arrow[d, "< id_B, id_B >"'] \arrow[dr, "id_B"] & \\
B & B \times B \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

comuta. Então $< f, g >: A \to B \times B$ e $< id_B, id_B >: B \to B \times B$ são ambos morfismos com codomínio $B \times B$ e, uma vez que $\mathbf{C}$ tem produtos fibrados, existe o produto fibrado de $(< f, g >, < id_B, id_B >)$. Seja $(I, (i : I \to A, h : I \to B))$ esse produto fibrado.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d, "< id_B, id_B >"] \\
A \arrow[r, "< f, g >"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

A respeito de $(I, i : I \to A)$ é simples verificar que é um igualizador de f e g. De facto, pela comutatividade do diagrama anterior tem-se $< id_B, id_B > \circ h$ $=< f, g > \circ i$, donde segue que $f \circ i = h = g \circ i$. Além disso, admitindo que existe outro morfismo $e : E \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$, conclui-se que existe um único morfismo $v : E \to I$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "v"] \arrow[drr, "f \circ e = g \circ e"] \arrow[ddr, "e"'] & & \\
 & I \arrow[r, "f \circ i = g \circ i"'] \arrow[d, "i"] & B \arrow[d, "(id_B, id_B)"] \\
 & A \arrow[r, "(< f, g >"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

comuta, uma vez que $(I,(i,h))$ é produto fibrado de $(< f, g >, < id_A, id_B >)$. Logo o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dd, "v"'] \arrow[dr, "e"] & & \\
& A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
I \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

também comuta. Qualquer outro morfismo $v' : E \to I$ que faça este último diagrama comutar também torna comutativo o diagrama anterior e pela unicidade de v vem que $v = v'$. Logo (I, i) é um igualizador de (f, g). $\square$

O conceito seguinte é a noção dual de D-cone.

Definição 4.9.6. *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria,* D *um diagrama em* $\mathbf{C}$ *e* $(D_i)_{i\in I}$ *a família de objetos de* D*. Um* ***cocone do diagrama*** D *é um par* $(C,(f_i : D_i \to C)_{i\in I})$*, onde* C *é um objeto de* $\mathbf{C}$ *e* $(f_i : D_i \to C)_{i\in I}$ *é uma família de* $\mathbf{C}$*-morfismos, tal que, para cada morfismo* $g : D_j \to D_k$ *existente em* D*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
D_j \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_j"'] & & D_k \arrow[dl, "f_k"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

comuta, i.e., $f_k \circ g = f_j$*.*

Definição 4.9.7. *Um co-cone* $(L,(\lambda_i : D_i \to L)_{i\in I})$ *de um diagrama* D *numa categoria* $\mathbf{C}$ *diz-se um* ***colimite do diagrama*** D *se, para qualquer outro co-cone* $(C,(f_i : D_i \to C)_{i\in I})$*, existe um único morfismo* $u : L \to C$ *tal que, para cada* $i \in I$*, o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, "u"] & & C \\
& D_i \arrow[ul, "\lambda_i"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta, i.e., tal que $u \circ \lambda_i = f_i$*.*

4.10 Funtores

No início deste capítulo foram apresentados vários exemplos de domínios matemáticos formulados como categorias. Por conseguinte, atendendo a que as categorias constituem elas própias um domínio matemático, é natural questionar se existem categorias de categorias. De facto, como iremos ver mais à frente, tais categorias existem: os objetos destas categorias são categorias e os morfismos, designados por funtores, são correspondências entre categorias que preservam a sua estrutura.

Definição 4.10.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um* ***funtor*** *(ou* ***funtor covariante****)* F *de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *é uma correspondência que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa um único objeto* $F(A)$ *de* $\mathbf{D}$ *e a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *associa um único* $\mathbf{D}$*-morfismo* $F(f) : F(A) \to F(B)$ *de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas:*

(F1) *para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$*,* $F(id_A) = id_{F(A)}$*;*

(F2) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*, para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*.*

Se F *é um funtor de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *escrevemos* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*.*

Definição 4.10.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um* ***cofuntor*** *(ou* ***funtor contravariante****)* F *de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *é uma correspondência que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa um único objeto* $F(A)$ *de* $\mathbf{D}$ *e a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *associa um único* $\mathbf{D}$*-morfismo* $F(f) : F(B) \to F(A)$ *de tal modo que as seguintes condições são satisfeitas:*

(CF1) *para qualquer objeto* A *de* $\mathbf{C}$*,* $F(id_A) = id_{F(A)}$*;*

(CF2) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$*, para quaisquer* $\mathbf{C}$*-morfismos* $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$*.*

Se F *é um funtor contravariante de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{D}$ *escrevemos* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*.*

Exemplo 4.10.3.

(1) *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria. A correpondência* $Id_{\mathbf{C}}$ *de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}$*, que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o objeto* $Id_{\mathbf{C}}(A) = A$ *e a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* f *associa o morfismo* $Id_{\mathbf{C}}(f) = f$*, é um funtor de* $\mathbf{C}$ *em* $\mathbf{C}$*, ao qual se dá a designação de* ***funtor identidade em*** $\mathbf{C}$ *e que se representa por* $Id_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$*.*

(2) *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $\mathbf{C}'$ *uma subcategoria de* $\mathbf{C}$*. A correspondência* I *de* $\mathbf{C}'$ *em* $\mathbf{C}$*, que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}'$ *faz corresponder o objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *e a cada morfismo* f *de* $\mathbf{C}'$ *associa o morfismo* f *de* $\mathbf{C}$*, define um funtor de* $\mathbf{C}'$ *em* $\mathbf{C}$*, que se designa por* ***funtor inclusão****.*

(3) *A correspondência* E *da categoria* **Mon** *na categoria* **Set***, que a cada monóide* $(M; \cdot^M, 1_M)$ *da categoria* **Mon** *associa o conjunto* M *da categoria* **Set** *e que a cada homomorfismo de monóides* $f : (M; \cdot^M; 1_M) \to (N; \cdot^N, 1_N)$ *associa a função* $f : M \to N$*, é um funtor da categoria* **Mon** *na categoria* **Set***. Este funtor é um exemplo de funtores designados por funtores esquecimento.*

(4) *Considerando monóides* M *e* N *como categorias, qualquer homomorfismo de monóides* $f : M \to N$ *é um funtor de* M *em* N*.*

(5) *Sejam* $\mathbf{P}_1 = (P_1, \leq_1)$ *e* $\mathbf{P}_2 = (P_2, \leq_2)$ *c.p.o.'s. Considerando* $\mathbf{P}_1$ *e* $\mathbf{P}_2$ *como categorias, tem-se* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_1) = \leq_1$ *e* $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}_2) = \leq_2$*. Se* F *é um funtor de* $\mathbf{P}_1$ *em* $\mathbf{P}_2$*,*

então a cada $\mathbf{P}_1$*-morfismo de* a *em* b *é associado um* $\mathbf{P}_2$*-morfismo de* $F(a)$ *em* $F(b)$*, i.e.,*

$$(a, b) \in \leq_1 \Rightarrow (F(a), F(b)) \in \leq_2 .$$

Por conseguinte, F *é uma aplicação isótona de* P_1 *em* P_2*.*

(6) *Sejam* $\mathbf{C}$ *uma categoria e* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *a sua categoria dual. A correspondência* D*, que a todo o objeto* A *em* $\mathbf{C}$ *associa o objeto* A *em* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *e que a cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : A \to B$ *associa o* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*-morfismo* $f : B \to A$*, define um cofunctor* $D : \mathbf{C} \to \mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*, que se designa por* ***cofuntor dualidade****. De forma análoga define-se o cofuntor dualidade* $D^{op} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{C}$*.*

(7) *Considere-se, na categoria* ***Set****, a correspondência* P *que:*

- *a cada conjunto* A *faz corresponder o seu conjunto potência* $\mathcal{P}(A)$*;*
- *a cada aplicação* $f : A \to B$ *associa a aplicação* $P(f) : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ *definida por*

$$P(f)(B') = f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}, \quad \forall B' \subseteq B.$$

Facilmente se verifica que P *é um confuntor de* ***Set*** *em* ***Set****.*

Definição 4.10.4. *Sejam* $\mathbf{C}$*,* $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{E}$ *categorias. Dados um funtor ou cofuntor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e um funtor ou cofuntor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$*, designa-se por* ***composição de F com G****, e representa-se por GF, a correspondência que a cada objeto* A *de* $\mathbf{C}$ *associa o objeto GF(A) = G[F(A)] de* $\mathbf{E}$ *e a cada morfismo* f *de* $\mathbf{C}$ *associa o morfismo GF(*f*) = G[F(*f*)] de* $\mathbf{E}$*.*

Proposição 4.10.5. *Sejam* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*,* $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *e* $H\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores ou cofuntores. Então,*

(1) *Se* F *e* G *são ambos funtores ou ambos cofuntores, GF é um funtor. Caso contrário, GF é um cofuntor.*

(2) *H(GF) = (HG)F.*

(3) $FId_{\mathbf{A}} = F = Id_{\mathbf{B}}F$*.*

Atendendo à propriedade associativa dos funtores podemos escrever, sem ambiguidade, HGF para representar quer $H(GF)$ quer $(HG)F$.

Definição 4.10.6. *Sejam* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *categorias e* $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*,* $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *funtores ou cofuntores.*

(1) *Se* F *e* G *são ambos funtores ou ambos cofuntores, ao funtor GF dá-se a designação de* ***funtor composição****.*

(2) *Se F é um funtor (respetivamente, cofuntor) e G é um cofuntor (respetivamente, funtor) ao confuntor GF dá-se a designação de* ***cofuntor composição****.*

Definição 4.10.7. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *diz-se um* ***isomorfismo*** *se existe um funtor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tal que* $FG = Id_{\mathbf{D}}$ *e* $GF = Id_{\mathbf{C}}$.

Um funtor F de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$, associa a cada objeto A de $\mathbf{C}$ a sua "imagem" $F(A)$ em $\mathbf{D}$ e associa a cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$ a sua "imagem" $F(f) : F(A) \to F(B)$. Estas "imagens" permitem obter uma representação de $\mathbf{C}$ na categoria $\mathbf{D}$, pelo que se coloca a questão de saber que propriedades de $\mathbf{C}$ são preservadas pelo funtor F. A respeito desta questão é simples concluir que a representação de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ não é necessariamente uma subcategoria de $\mathbf{D}$.

Considere-se, por exemplo, a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B_1 \arrow[loop right, "id_{B_1}"] & B_2 \arrow[loop left, "id_{B_2}"] \arrow[r, "g"] & C \arrow[loop right, "id_C"] \end{tikzcd}$$

e seja $\mathbf{D}$ a categoria

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[loop left, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] \arrow[rr, bend left, "g' \circ f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop right, "id_{C'}"] \end{tikzcd}$$

Considere-se, também, a correspondência F de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ tal que

- $F(A) = A'$, $F(B_1) = F(B_2) = B'$, $F(C) = C'$;
- para cada objeto X de $\mathbf{C}$, $F(id_X) = id_{F(X)}$;
- $F(f) = f'$, $F(g) = g'$.

Facilmente se verifica que F é um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, no entanto, a "imagem" de $\mathbf{C}$ não é uma subcategoria de $\mathbf{D}$; note-se que a referida "imagem"

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[loop left, "id_{A'}"] \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[loop above, "id_{B'}"] \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[loop right, "id_{C'}"] \end{tikzcd}$$

não é uma categoria, uma vez que tem os morfismos $f' : A' \to B'$ e $g' : B' \to C'$, mas não tem a sua composição.

Definição 4.10.8. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor e* P *uma propriedade a respeito de morfismos. Diz-se que:*

- *F **preserva** P se, para qualquer morfismo f em $\mathbf{C}$, sempre que f tem a propriedade P, o morfismo $F(f)$ também a tem.*
- *F **reflete** P se, para qualquer morfismo f em $\mathbf{C}$, sempre que $F(f)$ tem a propriedade P, o morfismo f também a tem.*

Para abreviar, diz-se apenas que F preserva (reflete) X se F preserva (reflete) a propriedade de ser X.

Note-se que os funtores não preservam necessariamente monomorfismos e epimorfismos.

Considere-se, por exemplo, a categoria $\mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

e a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[loop left, "g"] \arrow[r, "f = f \circ g"] & B \arrow[loop above, "id_B"] \end{tikzcd}$$

O morfismo f é um monomorfismo na categoria $\mathbf{2}$, mas não é um monomorfismo na categoria $\mathbf{C}$. Por conseguinte, o funtor inclusão da categoria $\mathbf{2}$ na categoria $\mathbf{C}$ não preserva monomorfismos.

Proposição 4.10.9. *Os funtores preservam inversos direitos, inversos esquerdos e isomorfismos.*

Demonstração. Apresenta-se a prova de que os funtores preservam inversos direitos, ficando ao cuidado do leitor a prova dos restantes casos.
Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Se f é um inverso direito, então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$. Por conseguinte, $F(g \circ f) = F(id_A)$, donde segue que $F(g) \circ F(f) = id_{F(id_A)}$. Logo $F(f)$ é um inverso direito em $\mathbf{D}$. $\square$

Embora os funtores preservem inversos direitos, inversos esquerdos e isomorfismos, não refletem necessariamente estas propriedades. Por exemplo, o funtor F da categoria $\mathbf{2}$ na categoria $\mathbf{1}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop above, "id_B"] & & A' \arrow[loop above, "id_{A'}"] \end{tikzcd}$$

que associa cada objeto da categoria $\mathbf{2}$ ao objeto A' da categoria $\mathbf{1}$ e que associa cada morfismo da categoria $\mathbf{2}$ ao mofismo $id_{A'}$, não reflete isomorfismos, uma vez que o morfismo $id_{A'}$ é um isomorfismo na categoria **1**, mas o morfismo f da categoria **2** não é.

Os exemplos anteriores permitem perceber que a "imagem" de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$ pode não dizer muito a respeito de $\mathbf{C}$, pelo que tem interesse estudar funtores que preservam/refletem mais propriedades.

Definição 4.10.10. *Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Um functor $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ diz-se:*

(1) ***injetivo em objetos*** *se, para quaisquer objetos A e B de $\mathbf{C}$,*

$$F(A) = F(B) \Rightarrow A = B;$$

(2) ***fiel*** *se para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f, g : A \to B$*

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g;$$

(3) *um **mergulho** se é injetivo em objetos e fiel;*

(4) ***representativo*** *se para todo o objeto B de $\mathbf{D}$, existe um objeto A em $\mathbf{C}$ tal que $F(A) = B$;*

(5) ***pleno*** *se, para quaisquer objetos A e B de $\mathbf{C}$ e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo $g : F(A) \to F(B)$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : A \to B$ tal que $F(f) = g$.*

De modo análogo, define-se ***cofuntor injetivo em objetos***, ***cofuntor fiel***, ***cofuntor mergulho***, ***cofuntor representativo*** e ***cofuntor pleno***.

Exemplo 4.10.11.

(1) *Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $\mathbf{C}'$ uma subcategoria de $\mathbf{C}$. O funtor inclusão $I : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ é injetivo em objetos e é fiel; caso $\mathbf{C}'$ seja uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$, o funtor I é pleno.*

(2) *O funtor esquecimento $E : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$, que a cada monóide $(M; \cdot^M, 1_M)$ associa o conjunto M e que a cada homomorfismo de monóides $f : (M; \cdot^M, 1_M) \to (N; \cdot^N, 1_N)$ associa a função $f : M \to N$, é, claramente, um funtor fiel, pois a homormofismos de monóides diferentes são associadas funções diferentes. Contudo, atendendo a que existem morfismos da categoria **Set** que não correspondem a homomorfismos de monóides, o funtor E não é pleno. Este funtor também não é injetivo em objetos, uma vez que é possível ter monóides distintos com o mesmo conjunto suporte.*

(3) *Sejam $\mathbf{M}$ e $\mathbf{N}$ as categorias correspondentes aos monóides $(M; \cdot^M, 1_M)$ e $(N; \cdot^N, 1_N)$ e seja $f : M \to N$ um homomorfismo de monóides sobrejetivo e não injetivo. Então f é um funtor pleno, mas não é fiel.*

Proposição 4.10.12. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor.*

(1) *Se* F *é um funtor fiel, então* F *reflete monomorfismos e epimorfismos.*

(2) *Se* F *é um funtor fiel e pleno, então* F *reflete inversos direitos e inversos esquerdos.*

Demonstração. (1) Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo e suponhamos que $F(f)$ é um monomorfismo. Sejam $g, h : C \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ g = f \circ h$. Então $F(f \circ g) = F(f \circ h)$, donde $F(f) \circ F(g) = F(f) \circ F(h)$. Uma vez que $F(f)$ é um monomorfismo, tem-se $F(g) = F(h)$ e, atendendo a que F é fiel, resulta que $g = h$. Logo F reflete monomorfismos.

De modo análogo prova-se que F reflete epimorfismos.

(2) Mostremos que se F é fiel e pleno, então F reflete inversos direitos. Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é um inverso direito. Então existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g' : F(B) \to F(A)$ tal que $g' \circ F(f) = id_{F(A)}$. Uma vez que F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$, tal que $F(g) = g'$. Por conseguinte, $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$, donde $F(g \circ f) = F(id_A)$. Então, atendendo a que F é fiel, vem que $g \circ f = id_A$ e, portanto, f é um inverso direito. Logo F reflete inversos direitos.

A prova de que F reflete inversos esquerdos é similar. □

4.11 Categorias de categorias

As propriedades dos funtores sugerem o estudo de categorias cujos objetos são categorias e cujos morfismos são funtores.

Um quádruplo $\mathbf{K} = (K, \hom, id, \circ)$ onde

- K é uma classe de categorias;
- hom é uma correspondência que a duas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ de K associa um conjunto de funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$;
- id é uma correspondência que a cada categoria $\mathbf{C}$ de K associa o funtor $Id_{\mathbf{C}}$;
- $\circ$ é uma correspondência que a cada par $(F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \to \mathbf{E})$ de morfismos de $\mathbf{K}$ associa o funtor $GF : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$,

é uma categoria.

Exemplo 4.11.1. *São exemplos de categorias de categorias:*

(1) *A categoria* **Mon**. *Já observamos anteriormente que cada monóide pode ser visto como uma categoria, logo* **Mon** *pode ser vista como uma categoria de categorias.*

(2) *A categoria que tem como único objeto uma categoria* $\mathbf{C}$ *e que tem como único morfismo o funtor* $Id_{\mathbf{C}}$.

(3) *A categoria cuja classe de objetos é formada por todas as categorias finitas e cuja coleção de morfismos é a coleção de funtores entre estas categorias.*

(4) *A categoria* **Cat** *cuja classe de objetos é formada por todas as categorias pequenas e cuja coleção de morfismos é formada por todos os funtores entre categorias pequenas.*

Os casos anteriores são exemplos de categorias de categorias que não são problemáticos. No entanto, existem certas limitações na definição de categorias cujos objetos são categorias. Por exemplo, definindo como categoria ***normal*** uma categoria que não é um dos seus objetos, será que existe alguma categoria que inclua todas as categorias normais? Usando um argumento similar ao do Paradoxo de Russel, para provar que não existe o conjunto de todos os conjuntos normais, somos levados a concluir que não existe a categoria de todas as categorias normais. De facto, se admitirmos que existe a categoria $\mathbf{N}$ de todas as categorias normais, temos dois casos a considerar: $\mathbf{N}$ é uma categoria normal ou $\mathbf{N}$ não é normal. Se considerarmos que $\mathbf{N}$ é uma categoria normal, então $\mathbf{N}$ é um dos elementos de $\mathbf{N}$, o que contradiz a hipótese de $\mathbf{N}$ ser normal. Logo, $\mathbf{N}$ não pode ser uma categoria normal. Mas se $\mathbf{N}$ não é uma categoria normal, então $\mathbf{N}$ não é um dos elementos de $\mathbf{N}$, donde segue que $\mathbf{N}$ é normal (contradição). O argumento associado ao Paradoxo de Russel também é usado para argumentar que não existe o conjunto de todos os conjuntos, pelo que, por argumentos análogos, é discutível a existência da categoria de todas as categorias. Atendendo a que para o nosso estudo não há a necessidade de considerar uma categoria universal de categorias, limitamos o estudo de categorias de categorias a casos em que não se coloquem este tipo de problemas.

4.12 Transformações naturais

Os morfismos de uma categoria permitem relacionar objetos e cada funtor relaciona categorias. Seguidamente iremos ver como as transformações naturais permitem relacionar funtores.

Definição 4.12.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores. Chama-se* ***transformação natural de*** F ***em*** G, *e representa-se por* $\tau : F \to G$, *a uma correspondência que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa um* $\mathbf{D}$*-morfismo* $\tau_C : F(C) \to G(C)$ *tal que, para cada* $\mathbf{C}$*-morfismo* $f : C \to C'$, *o diagrama seguinte comuta*

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(C) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & G(C')
\end{tikzcd}$$

i.e., $\tau_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \tau_C$.
Para cada objeto C *de* $\mathbf{C}$, *o morfismo* τ_C *diz-se uma* ***componente da transformação natural***.
Se para cada objeto C *de* $\mathbf{C}$, τ_C *é um isomorfismo, então* τ *diz-se um* ***isomorfismo natural*** *e escreve-se* $\tau : F \xrightarrow{\sim} G$.

Exemplo 4.12.2.

(1) *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. A correspondência que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa o* $\mathbf{D}$*-morfismo* $id_{F(C)}$ *é uma transformação natural de* F *em* F*, designada por* ***transformação identidade*** *e representada por* id_F*.*

(2) *Dado um grupo* $\mathcal{G} = (G; *, \ ^{-1}, 1_G)$*, define-se grupo dual de* $\mathcal{G}$ *como sendo o grupo* $\mathcal{G}^{op} = (G; *^{op}, \ ^{-1}, 1_G)$*, onde* $*^{op}$ *é a operação definida por* $a *^{op} b = b * a$*. Considerando a noção de grupo dual, pode definir-se o funtor* $Op : \boldsymbol{Grp} \to \boldsymbol{Grp}$ *que a cada grupo* $\mathcal{G}$ *da categoria* $\boldsymbol{Grp}$ *associa o seu grupo dual* $\mathcal{G}^{op}$ *e que a cada homomorfismo de grupos* $f : G \to H$ *associa o homomorfismo de grupos* $f^{op} : G^{op} \to H^{op}$*, definido por* $f^{op}(a) = f(a)$*.*
A correspondência τ *que a cada grupo* $\mathcal{G}$ *da categoria* $\boldsymbol{Grp}$ *associa o homomorfismo* $\tau_{\mathcal{G}} : Id_{\boldsymbol{Grp}}(\mathcal{G}) \to Op(\mathcal{G})$*, definido por* $\tau_{\mathcal{G}}(g) = g^{-1}$*, é uma transformação natural do funtor* $Id_{\boldsymbol{Grp}}$ *no funtor* Op*.*

(3) *Seja* $P : \boldsymbol{Set} \to \boldsymbol{Set}$ *o cofuntor que:*

- *a cada conjunto* A *faz corresponder o seu conjunto potência* $\mathcal{P}(A)$*;*
- *a cada aplicação* $f : A \to B$ *associa a aplicação* $P(f) : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ *definida por*
$$P(f)(B') = f^{\leftarrow}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}, \ \ \forall B' \subseteq B.$$

Então PP *é um funtor e a correspondência que a cada conjunto* A *associa a função* $\tau_A : A \to PP(A)$*, definida por* $\tau_A(a) = \{\{a\}\}$*, para todo* $a \in A$*, define uma transformação natural* $\tau : Id_{\boldsymbol{Set}} \to PP$*.*

As transformações naturais podem ser combinadas de forma a definir novas transformações naturais.

Proposição 4.12.3. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias,* $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *e* $\eta : G \to H$ *transformações naturais. Então, a correspondência que a cada objeto* C *de* $\mathbf{C}$ *associa o* $\mathbf{D}$*-morfismo* $(\eta \circ \tau)_C = \eta_C \circ \tau_C$ *é uma transformação natural de* F *em* H*.*

Demonstração. Por definição de transformação natural, a cada objeto C de $\mathbf{C}$, as transformações naturais τ e η associam, respetivamente, $\mathbf{D}$-morfismos $\tau_C : F(C) \to G(D)$ e $\eta_C : G(C) \to H(C)$. Por conseguinte, para cada objeto C de $\mathbf{C}$, $(\eta \circ \tau)_C = \eta_C \circ \tau_C$ é um $\mathbf{D}$-morfismo. Além disso, para cada $\mathbf{C}$-morfismo $f : C \to C'$, o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
F(C) \arrow[r, "(\eta \circ \tau)_C"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(C) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(C') \arrow[r, "(\eta \circ \tau)_{C'}"'] & H(C')
\end{tikzcd}$$

De facto, como τ e η são transformações naturais, para cada **C**-morfismo $f : C \to C'$, tem-se

$$G(f) \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ F(f) \quad \text{e} \quad H(f) \circ \eta_C = \eta_{C'} \circ G(f).$$

Logo

$$\begin{array}{rcl} H(f) \circ (\eta \circ \tau)_C & = & H(f) \circ (\eta_C \circ \tau_C) \quad = \quad (H(f) \circ \eta_C) \circ \tau_C \\ & = & (\eta_{C'} \circ G(f)) \circ \tau_C \quad = \quad \eta_{C'} \circ (G(f) \circ \tau_C) \\ & = & \eta_{C'} \circ (\tau_{C'} \circ F(f)) \quad = \quad (\eta_{C'} \circ \tau_{C'}) \circ F(f) \\ & = & (\eta \circ \tau)_{C'} \circ F(f). \end{array}$$

Assim, a correspondência que a cada objeto C de **C** associa o **D**-morfismo $(\eta \circ \tau)_C = \eta_C \circ \tau_C$ é uma transformação natural de F em H. □

Definição 4.12.4. *Sejam* **C** *e* **D** *categorias,* $F, G, H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$ *e* $\eta : G \to H$ *transformações naturais. Designa-se por* ***composta de*** η ***e*** τ*, e representa-se por* $\eta \circ \tau$*, a transformação natural de* F *em* H *definida na proposição anterior.*

A respeito da composição de transformações naturais, é simples verificar as propriedades seguintes.

Proposição 4.12.5. *Sejam* **C** *e* **D** *categorias,* $F, G, H, L : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *funtores e* $\tau : F \to G$, $\eta : G \to H$ *e* $\sigma : H \to L$ *transformações naturais. Então*

(1) $id_G \circ \tau = \tau$ *e* $\tau \circ id_G = \tau$.

(2) $(\sigma \circ \eta) \circ \tau = \sigma \circ (\eta \circ \tau)$.

As transformações naturais e os funtores também podem ser combinados de forma a definir novas trasformações naturais.

Proposição 4.12.6. *Sejam* **C**, **D** *e* **E** *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ *e* $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Então:*

(1) *A correspondência que a cada objeto* C *de* **C** *associa o* **E***-morfismo* $(\tau F)_C = \tau_{F(C)}$*, define uma transformação natural* $\tau F : GF \to G'F$.

(2) *A correspondência que a cada objeto* D *de* **D** *associa o* **C***-morfismo* $(H\tau)_D = H(\tau_D)$*, define uma transformação natural* $H\tau : HG \to HG'$.

Demonstração. (1) Uma vez que F é um funtor de **C** em **D**, para cada objeto C de **C**, $F(C)$ é um objeto de **D**. Então, sendo τ uma transformação natural de G em G', $\tau_{F(C)} : G(F(C)) \to G'(F(C))$ é um **E**-morfismo. Além disso, para qualquer **C**-morfismo $f : C \to C'$, o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} GF(C) \arrow[r, "(\tau F)_C"] \arrow[d, "GF(f)"'] & G'F(C) \arrow[d, "G'F(f)"] \\ GF(C') \arrow[r, "(\tau F)_{C'}"'] & G'F(C') \end{tikzcd}$$

De facto, como $F(f) : F(C) \to F(C')$ é um **D**-morfismo e τ é uma transformação natural de G em G', tem-se

$$G'(F(f)) \circ \tau_{F(C)} = \tau_{F(C')} \circ G(F(f)),$$

donde

$$(G'F(f)) \circ (\tau F)_C = (\tau F)_{C'} \circ (GF(f)).$$

Do que foi provado conclui-se que a correspondência indicada é uma transformação natural de GF em $G'F$.

(2) A prova é análoga à anterior. □

Proposição 4.12.7. *Sejam* $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ *e* $\mathbf{E}$ *categorias,* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $H : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ *e* $G, G' : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ *funtores e* $\tau : G \to G'$ *uma transformação natural. Se* τ *é um isomorfismo natural, então:*

(1) *a correspondência que a cada objeto* D *de* $\mathbf{D}$ *associa o* $\mathbf{E}$*-morfismo* $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ *é um isomorfismo natural de* G' *em* G*, representado por* $\tau^{-1} : G' \to G$*, e tem-se* $\tau \circ \tau^{-1} = id_{G'}$ *e* $\tau^{-1} \circ \tau = id_G$*.*

(2) τF *é um isomorfismo natural e* $(\tau F)^{-1} = \tau^{-1} F$*.*

(3) $H\tau$ *é um isomorfismo natural e* $(H\tau)^{-1} = H\tau^{-1}$*.*

Demonstração. Demonstramos a propriedade (1), a prova das restantes propriedades fica como exercício.

(1) Atendendo a que τ é um isomorfismo natural de G em G', a cada objeto D de **D** é associado um **E**-isomorfismo $\tau_D : G(D) \to G'(D)$. Logo, para cada objeto D de **D**, $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ é um **E**-isomorfismo. Além disso, para cada **D**-morfismo $f : D \to D'$, tem-se

$$G'(f) \circ \tau_D = \tau_{D'} \circ G(f)$$

donde

$$(\tau_{D'})^{-1} \circ G'(f) \circ \tau_D \circ (\tau_D)^{-1} = (\tau_{D'})^{-1} \circ \tau_{D'} \circ G(f) \circ (\tau_D)^{-1}$$

e, por conseguinte,

$$(\tau_{D'})^{-1} \circ G'(f) = G(f) \circ (\tau_D)^{-1}.$$

Logo

$$(\tau^{-1})_{D'} \circ G'(f) = G(f) \circ (\tau_D^{-1}).$$

Assim, a correspondência a cada objeto D de **D** associa o **E**-morfismo $(\tau^{-1})_D = (\tau_D)^{-1}$ é um isomorfismo natural de G' em G.

Facilmente também se verifica que $\tau \circ \tau^{-1} = id_{G'}$. De facto, $\tau \circ \tau^{-1}$ e $id_{G'}$ são ambas transformações naturais de G' em G' e, para cada objeto D de **D**,

$$(\tau \circ \tau^{-1})_D = \tau_D \circ (\tau^{-1})_D = \tau_D \circ (\tau_D)^{-1} = id_{G'(D)} = (id_{G'})_D.$$

De modo análogo prova-se que $\tau^{-1} \circ \tau = id_G$. □

A propriedade associativa da composição de transformações naturais e a existência de uma transformação natural identidade id_F associada a cada funtor F, sugerem a possibilidade de se definir uma categoria cuja classe de objetos é a classe $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ formada por todos os funtores de uma categoria $\mathbf{C}$ numa categoria $\mathbf{D}$ e cujos morfismos são todas as transformações naturais entre estes funtores. Porém, tendo em atenção a definição de categoria aqui adotada, é necessário colocar algumas restrições na definição de categorias de funtores. Note-se que se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias arbitrárias e F e G são funtores de $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, não é garantido que a classe $[F, G]$ de todas as transformações naturais de F em G seja um conjunto. Sendo assim, restringimos o estudo de categorias de funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ ao caso em que $\mathbf{C}$ é uma categoria pequena, pois neste caso é garantido que, para quaisquer funtores F e G de $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, a classe $[F, G]$ é um conjunto. Nestas condições podemos considerar a categoria $([\mathbf{C}, \mathbf{D}], \hom, id, \circ)$, onde

- hom é a correspondência que a dois funtores $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ associa o conjunto de todas as transformações naturais de F em G,

- id é a correspondência que a cada funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ associa a transformação natural $id_F : F \to F$,

- $\circ$ é a correspondência que a cada par de transformações naturais $\tau : F \to G$ e $\eta : G \to H$ associa a transformação natural $\eta \circ \tau : F \to H$.

4.13 Equivalência de categorias

Uma vez que existem categorias que têm bastantes propriedades em comum sem que exista necessariamente um isomorfismo entre elas, surge a necessidade de definir um conceito"menos exigente" que o de categorias isomorfas. A noção de isomorfismo natural de funtores permite definir categorias equivalentes.

Definição 4.13.1. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias. Um funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *diz-se uma* ***equivalência*** *se existem um funtor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *e isomorfismos naturais* $\tau : GF \xrightarrow{\backsim} Id_{\mathbf{C}}$ *e* $\eta : Id_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\backsim} FG$.

Claramente, todo o funtor que seja um isomorfismo é uma equivalência.

Proposição 4.13.2. *Sejam* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *categorias e* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *um funtor. Então são equivalentes as afirmações seguintes:*

(1) *F é um funtor pleno, fiel e representativo.*

(2) *Existem um funtor* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *e isomorfismos naturais* $\tau : GF \xrightarrow{\backsim} Id_{\mathbf{C}}$ *e* $\eta : Id_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\backsim} FG$ *tais que* $F\tau = (\eta F)^{-1}$ *e* $G\eta = (\tau G)^{-1}$.

Demonstração. $[(1) \Rightarrow (2)]$ Admitamos que F é um funtor pleno, fiel e representativo. Como F é representativo, para cada objeto D de $\mathbf{D}$, pode escolher-se um objeto C em $\mathbf{C}$ tal que $F(C) = D$. Definindo $G(D) = C$, também se pode escolher um isomorfismo $\eta_D : D \to FG(D)$ em **D**. Assim, dado um **D**-morfismo $h : D \to D'$, tem-se o morfismo $\eta_{D'}h(\eta_D)^{-1} : FG(D) \to FG(D')$. Uma vez que F é fiel e pleno, existe um único morfismo $i : G(D) \to G(D')$ em **C** tal que $F(i) = \eta_{D'}h(\eta_D)^{-1}$, i.e., tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "h"'] & FG(D) \arrow[d, "F(i)"] \\ D' \arrow[r, "\eta_{D'}"'] & FG(D') \end{tikzcd}$$

é comutativo. Defina-se $G(h) = i$.
A correspondência G de **D** em **C** definida desta forma é um funtor de **D** em **C**. De facto, para qualquer objeto D de **D**,

$$FG(id_D) = \eta_D id_D(\eta_D)^{-1} = id_{FG(D)} = F(id_{G(D)})$$

e, uma vez que F é fiel, tem-se $G(id_D) = id_{G(D)}$. Além disso, para quaisquer **D**-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$,

$$\begin{aligned} FG(g \circ f) &= \eta_C \circ g \circ f \circ (\eta_A)^{-1} \\ &= (\eta_C \circ g \circ (\eta_B)^{-1}) \circ (\eta_B \circ f \circ (\eta_A)^{-1}) \\ &= FG(g) \circ FG(f) \\ &= F(G(g) \circ G(f) \end{aligned}$$

e, novamente porque F é fiel, tem-se $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$.
Do diagrama anterior também é possível concluir que a correspondência que a cada objeto D de **D** associa o isomorfismo $\eta_D : D \to FG(D)$ define um isomorfismo natural $\eta : Id_{\mathbf{D}} \to FG$.
Seguidamente prova-se que também existe um isomorfismo natural $\tau : GF \to Id_{\mathbf{C}}$. Para tal, comecemos por observar que, para cada objeto C de **C**,

$$(\eta F)_C = \eta_{F(C)} : F(C) \to FGF(C)$$

é um isomorfismo em **D**. Então, $((\eta F)_C)^{-1} : FGF(C) \to F(C)$ é também um isomorfismo de **D** e, como é F fiel e pleno, existe um único morfismo $\tau_C : GF(C) \to C$ em **C** tal que $F(\tau_C) = ((\eta F)_C)^{-1}$. É simples verificar que a correspondência que a cada objeto C de **C** associa o morfismo $\tau_C : GF(C) \to C$ é um isomorfismo natural de GF em $Id_{\mathbf{C}}$. De facto, como F reflete isomorfismos, para cada objecto C de **C**, τ_C é um isomorfismo. Além disso, para cada morfismo $f : C \to C'$ de **C**, tem-se o seguinte diagrama em **C**

$$\begin{tikzcd} GF(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "GF(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\ GF(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & C' \end{tikzcd}$$

Aplicando o functor F a este diagrama, e considerando a definição de τ_C e $\tau_{C'}$, obtemos um diagrama comutativo em $\mathbf{D}$. Como F é fiel, resulta que, , para cada objeto C de $\mathbf{C}$, o diagrama anterior é comutativo. Logo $\tau : GF \to id_{\mathbf{C}}$ é um isomorfismo natural.
Uma vez que, para todo o objeto C de $\mathbf{C}$,

$$(F\tau)_C = F(\tau_C) = ((\eta F)_C)^{-1} = ((\eta F)^{-1})_C,$$

é imediato que $F\tau = (\eta F)^{-1}$. A igualdade $G\eta = (\tau G)^{-1}$ também é válida. De facto, atendendo a que $(\tau G)^{-1} = \tau^{-1}G$ e $(F\tau)^{-1} = F\tau^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned} F(((\tau G)^{-1})_D) &= F((\tau^{-1}G)_D) \\ &= F(\tau^{-1}_{G(D)}) \\ &= (F\tau^{-1})_{G(D)} \\ &= ((F\tau)^{-1})_{G(D)} \\ &= (\eta F)_{G(D)} \\ &= \eta_{FG(D)}, \end{aligned}$$

para todo o objeto D de $\mathbf{D}$. Uma vez que o diagrama

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\eta_D"] \arrow[d, "\eta_D"'] & FG(D) \arrow[d, "FG(\eta_D)"] \\ FG(D) \arrow[r, "\eta_{FG(D)}"'] & FG(FG(D)) \end{tikzcd}$$

é comutativo, também temos

$$FG(\eta_D) \circ \eta_D = \eta_{FG(D)} \circ \eta_D,$$

donde resulta

$$FG(\eta_D) = \eta_{FG(D)}.$$

Por conseguinte, para todo o objeto D de $\mathbf{D}$,

$$F((G\eta)_D) = F(((\tau G)^{-1})_D),$$

donde resulta $(G\eta)_D = ((\tau G)^{-1})_D$, uma vez que F é fiel. Logo $G\eta = (\tau G)^{-1}$.

[(2) ⇒ (1)] Admitamos que existem um funtor $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ e isomorfismos naturais $\tau : GF \xrightarrow{\sim} Id_{\mathbf{C}}$ e $\eta : Id_{\mathbf{D}} \xrightarrow{\sim} FG$ tais que $F\tau = (\eta F)^{-1}$ e $G\eta = (\tau G)^{-1}$.

Pela definição de η é imediato que F é representativo.

Mostremos que F é fiel. Sejam $f, g : C \to C'$ morfismos em $\mathbf{C}$ tais que $F(f) = F(g)$. Então, atendendo a que os diagramas seguintes são comutativos,

$$\begin{tikzcd} GF(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "GF(f)"'] & C \arrow[d, "f"] \\ GF(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & C' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF(C) \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "GF(g)"'] & C \arrow[d, "g"] \\ GF(C') \arrow[r, "\tau_{C'}"'] & C' \end{tikzcd}$$

tem-se

$$f \circ \tau_C = \tau_{C'} \circ GF(f) = \tau_{C'} \circ GF(g) = g \circ \tau_C,$$

donde segue que $f = g$, uma vez que τ_C é um isomorfismo.

Provemos que F é pleno. Seja $h : F(C) \to F(C')$ um morfismo em $\mathbf{D}$. Uma vez que o diagrama seguinte é comutativo

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "\eta_{F(C)}"] \arrow[d, "h"'] & FG(F(C)) \arrow[d, "FG(h)"] \\ F(C') \arrow[r, "\eta_{F(C')}"'] & FG(F(C')) \end{tikzcd}$$

tem-se $\eta_{F(C')} \circ h = FG(h) \circ \eta_{F(C)}$. Então

$$\begin{aligned} h &= (\eta_{F(C')})^{-1} \circ FG(h) \circ \eta_{F(C)} \\ &= F(\tau_{C'}) \circ FG(h) \circ F((\tau_C)^{-1}) \\ &= F(\tau_{C'} \circ G(h) \circ (\tau_C)^{-1}) \end{aligned}$$

e $\tau_{C'} \circ G(h) \circ (\tau_C)^{-1}$ é um $\mathbf{C}$-morfismo de C em C'. □

Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Se existir uma equivalência $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, diz-se que $\mathbf{C}$ é equivalente a $\mathbf{D}$. Note-se que se $\mathbf{C}$ é equivalente a $\mathbf{D}$, então $\mathbf{D}$ também é equivalente a $\mathbf{C}$. Assim, caso exista uma equivalência entre as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ diz-se que as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são ***equivalentes*** e escreve-se $\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$.

Exemplo 4.13.3.

(1) *Seja* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *a categoria dos espaços vetoriais finitos sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e seja* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *a categoria das matrizes sobre o corpo* $\mathbb{K}$ *(os objetos desta categoria são os inteiros não negativos,* $\mathrm{hom}(m,n)$ *é o conjunto das matrizes do tipo* $m \times n$ *sobre* $\mathbb{K}$*, a composição de morfismos é a multiplicação de matrizes). Seja* G *o funtor de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *em* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *tal que: para cada objeto* V *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$*,* $G(V) = \mathrm{dimV}$*; para cada morfismo* f *de* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$*,* $G(f)$ *é a matriz do morfismo* f *relativamente a bases fixas. O funtor* G *é fiel e pleno, uma vez que cada matriz* $A_{m\times n} : m \to n$ *representa (relativamente a bases fixas) uma única transformação linear. O funtor* G *também é representativo, uma vez que cada inteiro* m *é a dimensão do espaco vetorial* $\mathbb{K}^m$*. Assim, as categorias* $\mathbf{FDV}_{\mathbb{K}}$ *e* $\mathbf{MAT}_{\mathbb{K}}$ *são equivalentes.*

(2) *Seja P um conjunto pré-ordenado (i.e., um conjunto munido de uma relação binária $\preceq$ reflexiva e transitiva) visto como uma categoria. Em P considere-se a relação de equivalência θ definida por*

$$x\ \theta\ y \Leftrightarrow x \preceq y \quad \text{e} \quad y \preceq x, \qquad x, y \in P.$$

No conjunto quociente P/θ, a relação

$$[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \preceq y, \qquad x, y \in P$$

é uma ordem.
A aplicação canónica $F : P \to P/\theta$ é compatível com as relações binárias definidas nos conjuntos, pelo que F é um funtor de P em P/θ.
É simples verificar que F é uma equivalência de categorias. De facto, da sobrejetividade de F podemos concluir que F é um funtor representativo. De

$$\forall x, y \in P,\ x \preceq y \Leftrightarrow [x] \leq [y]$$

conclui-se que F é um funtor pleno. Da não existência de dois morfismos de um objeto para outro, segue que F é fiel.