Álgebra
Licenciatura em Ciências da Computação/Licenciatura em Matemática - 2º ano
Exercícios - Folha 5 2020/21

30. Sejam G um grupo e N_1, N_2, H subgrupos de G tais que N_1 é subgrupo normal de N_2. Mostre que:
    (a) $N_1 \cap H$ é subgrupo normal de $N_2 \cap H$;
    (b) Se H é subgrupo normal de G, então N_1H é subgrupo normal de N_2H.
31. Sejam G um grupo e H e K subgrupos normais de G.
    (a) Prove que HK é um subgrupo normal de G.
    (b) Supondo que $H \cap K = \{1_G\}$, mostre que:
        i. qualquer elemento de HK se escreve de maneira única (a menos da ordem dos fatores), como produto de um elemento de H por um elemento de K;
        ii. se $h \in H$ e $k \in K$ tiverem ambos ordem finita então
        $$|\langle h\rangle\langle k\rangle| = o(h)o(k).$$
32. Seja G um grupo que contém subgrupos normais H e K de ordens m e n, respetivamente, em que $\mathrm{m.d.c.}(m, n) = 1$. Prove que:
    (a) Os elementos de H comutam com os elementos de K;
    (b) O grupo G contém um subgrupo de ordem mn.
33. Diga, justificando, qual o valor lógico das seguintes afirmações:
    (a) Todo o grupo contém um subgrupo normal;
    (b) Existem grupos que só admitem um subgrupo próprio normal;
    (c) Existem grupos cujos subgrupos são todos normais;
    (d) A intersecção de dois subgrupos normais de um grupo G é um subgrupo normal de G;
    (e) Todo o subgrupo normal de um subgrupo normal de um grupo G é normal em G;
    (f) É condição suficiente para que a intersecção de dois subgrupos de um grupo G seja um subgrupo normal de G que um dos subgrupos seja normal em G;
    (g) É condição necessária para que a união de dois subgrupos de um grupo G seja um subgrupo normal de G que um dos dois subgrupos seja normal em G.
34. Diga quais das aplicações seguintes são morfismos de grupos, e, nesses casos, classifique-os:
    (a) $\varphi_1 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ definida por $\varphi_1(x) = x + 3$, para todo $x \in \mathbb{Z}$;
    (b) $\varphi_2 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ definida por $\varphi_2(x) = 3x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$;
    (c) $\varphi_3 : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^+, +)$ definida por $\varphi_3(x) = 2^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
35. Seja $\varphi : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ a aplicação definida por
    $$\varphi((x, y)) = (x + y, x - y) \qquad (x, y \in \mathbb{Z}).$$
    (a) Mostre que φ é um endomorfismo em $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.
    (b) Determine $\mathrm{Nuc}\ \varphi$.
    (c) Classifique o endomorfismo φ.
    (d) Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, φ^n é um endomorfismo em $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$.
36. Seja G um grupo. Para cada $a \in G$, considere a aplicação $\theta_a : G \to G$ definida por $\theta_a(x) = axa^{-1}$. Mostre que:
    (a) Para cada $a \in G$ a aplicação θ_a é um automorfismo de G. Para cada $a \in G$, o automorfismo θ_a designa-se por *automorfismo interno de* G;
    (b) Para cada $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(G)$ e cada $a \in G$, $\alpha\theta_a\alpha^{-1} = \theta_{\alpha(a)}$;
    (c) $\{\theta_a : a \in G\}$ é um subgrupo normal do grupo $\mathrm{Aut}\,(G)$. Este subgrupo representa-se por Inn(G);
    (d) A correspondência ϕ definida por $a \mapsto \theta_a$, com $a \in G$, é um morfismo de G em $\mathrm{Aut}\,(G)$;
    (e) $\mathrm{Nuc}\ \phi = Z(G)$.