Tópicos de Matemática

1º Teste

26/11/2010

(duração: 1h45)

Proposta de resolução.

1. **Considerando que as variáveis proposicionais p_0, p_1, p_2, p_3 representam as frases atómicas**

   p_0 **: O cão foge.** p_1 **: O portão está aberto.**
   p_2 **: A Ana fecha o portão.** p_3 **: O João fecha o portão.**

   represente por fórmulas proposicionais as frases seguintes

   (a) **"O cão foge sempre que o portão está aberto."**

   A frase é representada pela fórmula proposicional $p_1 \Rightarrow p_0$.

   (b) **"O portão está aberto só se a Ana não o fecha ou o João não o fecha."**

   A frase é representada pela fórmula $p_1 \Rightarrow (\neg p_2 \vee \neg p_3)$.

2. **Considere a fórmula proposicional $\varphi : (p \wedge \neg r) \vee ((q \vee r) \Rightarrow p)$.**

   (a) **Diga se a fórmula φ é uma tautologia.**

   Uma fórmula proposicional diz-se uma tautologia se assume sempre o valor lógico verdadeiro (V) independentemente do valor lógico das variáveis proposicionais que nela ocorrem. Da tabela de verdade da fórmula proposicional φ

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge \neg r$	$q \vee r$	$(q \vee r) \Rightarrow p$	φ
F	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	V

   podemos verificar que esta fórmula nem sempre é verdadeira. Por exemplo, quando as variáveis proposicionais p, q e r assumem, respectivamente, o valor lógico falso, falso e verdadeiro, a fórmula proposicional φ assume o valor lógico falso (F). Logo a fórmula φ não é uma tautologia e, portanto, a afirmação do enunciado é falsa.

   (b) Diga se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se a fórmula φ tem o valor lógico verdadeiro, então a variável proposicional r tem necessariamente o valor lógico falso".

   Esta afirmação é verdadeira se a variável proposicional r assumir o valor lógico falso (F) sempre que a fórmula φ assumir valor lógico verdadeiro (V). Ora, como podemos verificar pela última linha da tabela de verdade, a fórmula φ tem valor lógico verdadeiro (V) e, no entanto, a variável r tem valor lógico verdadeiro (V). Portanto, se a fórmula φ tem o valor lógico verdadeiro, a variável proposicional r não tem necessariamente o valor lógico falso. Sendo assim, a afirmação do enunciado é falsa.

3. **Considerando que p representa a proposição**

$$\forall x \forall y \ \ ((x = y) \Rightarrow \exists z \ \ z \neq x)$$

(a) **Indique um universo para as variáveis x, y, z onde a proposição p seja verdadeira e outro onde p seja falsa.**

Tomemos como universo de quantificação para as variáveis x, y, z o conjunto $U = \{1\}$. Para este universo de quantificação a proposição p é falsa. Com efeito, existem $x = 1$ e $y = 1$, elementos de U, tais que a implicação

$$x = y \Rightarrow \exists\, z\ z \neq x$$

é falsa: o antecedente desta implicação é verdadeiro, pois $x = y$, mas o consequente é falso, uma vez que não existe qualquer $z \in U$ tal que $z \neq x$.

Se considerarmos $V = \{0, 1\}$ como universo de quantificação para as variáveis x, y, z, então a proposição p é verdadeira.

De facto, dados $x, y \in V$, temos dois casos possíveis: $x \neq y$ ou $x = y$.

Caso $x \neq y$, então a implicação

$$x = y \Rightarrow \exists\, z\ z \neq x$$

é verdadeira, uma vez que o antecedente é falso.

Caso se considere $x = y$, então temos $x = 0 = y$ ou $x = 1 = y$. No primeiro caso, a implicação é verdadeira, uma vez que o consequente é verdadeiro, pois existe $z = 1 \in V$ tal que $z \neq x$. No segundo caso, a implicação também é verdadeira, uma vez que existe $z = 0 \in V$ tal que $z \neq x$ (e, portanto, o consequente da implicação é verdadeiro).

Logo para quaisquer $x, y \in V$, a implicação

$$x = y \Rightarrow \exists\, z\ z \neq x$$

é verdadeira e, portanto, a proposição p é verdadeira em V.

(b) **Indique em linguagem simbólica, sem recorrer ao símbolo de negação, uma proposição equivalente à negação de p.**

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\neg(\forall x \forall y\ \ ((x = y) \Rightarrow \exists\, z\ \ z \neq x)) &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \exists\, x\, \neg(\forall y\ \ ((x = y) \Rightarrow \exists\, z\ \ z \neq x)) \\
&\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \exists\, x\, \exists\, y\ \ \neg((x = y) \Rightarrow \exists\, z\ \ z \neq x)) \\
&\overset{(3)}{\Leftrightarrow} \exists\, x\, \exists\, y\ \ ((x = y) \wedge \neg(\exists\, z\ z \neq x)) \\
&\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \exists\, x\, \exists\, y\ \ ((x = y) \wedge (\forall\, z\, \neg(z \neq x))) \\
&\overset{(4)}{\Leftrightarrow} \exists\, x\, \exists\, y\ \ ((x = y) \wedge (\forall\, z\ z = x))
\end{aligned}$$

então

$$\exists\, x \exists\, y\ \ ((x = y) \wedge \forall\, z\ \ z = x)$$

é uma proposição logicamente equivalente à negação de p na qual não ocorre o símbolo de negação.

NOTA: Representando por q, r fórmulas proposicionais e por $q(x)$ um predicado, são válidas as seguintes equivalências lógicas:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \neg(\forall x\ q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ (\neg q(x)) \\
(2) & \neg(\exists x\ q(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (\neg q(x)) \\
(3) & \neg(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \wedge \neg r) \\
(4) & \neg(\neg q) \Leftrightarrow q
\end{array}$$

4. **Recorrendo a um dos métodos de prova estudados nas aulas, prove a seguinte afirmação:**

"Se a, b são reais positivos tais que $ab = c$, então $a \leq \sqrt{c}$ ou $b \leq \sqrt{c}$."

A prova segue por contradição. Para tal, admitamos que a e b são reais positivos tais que $ab = c$ e $\neg(a \leq \sqrt{c} \vee b \leq \sqrt{c})$ é verdade. Ora, $\neg(a \leq \sqrt{c} \vee b \leq \sqrt{c})$ é logicamente equivalente a ter $a > \sqrt{c}$ e $b > \sqrt{c}$, donde resulta que $ab > \sqrt{c}\sqrt{c} = c$ (o que contradiz $ab = c$). Logo para quaisquer a, b reais positivos, se $ab = c$, então $a \leq \sqrt{c}$ ou $b \leq \sqrt{c}$.

5. **Sejam**

$$\begin{array}{ll} A = \{2,3,4\}, & B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists y \in A : y = x+2\}, \\ C = \{1, (1,2), \{1\}\}, & D = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, x \in A \wedge x = y^2\}. \end{array}$$

(a) **Diga se é verdade que** $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) = C$.

Tem-se

$$\begin{aligned} B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists y \in A : y = x+2\} &= \{x \in \mathbb{N} \,|\, \exists y \in A : x = y-2\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x = 2-2 \vee x = 3-2 \vee x = 4-2\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} \\ &= \{1,2\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B) &= \{X : X \subseteq B\} &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}, \\ \mathcal{P}(A) &= \{X : X \subseteq A\} &= \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) &= \{X : X \in \mathcal{P}(B) \wedge X \notin \mathcal{P}(A)\} \cup \{x : x \in B \wedge x \notin A\} \\ &= \{\{1\}, \{1,2\}\} \cup \{1\} \\ &= \{\{1\}, \{1,2\}, 1\} \end{aligned}$$

Logo, como $\{1,2\} \notin C$, então $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) \neq C$.

Resolução alternativa: Uma vez que $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) \subseteq \mathcal{P}(B) \cup B$, $B \subseteq \mathbb{N}$ e $\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, então $(\mathcal{P}(B) \setminus \mathcal{P}(A)) \cup (B \setminus A) \neq C$, pois $(1,2) \notin \mathbb{N}$ e $(1,2) \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b) Dê exemplo, ou justifique que não existe, um conjunto X tal que

$$D \setminus (A \times B) \subseteq X \subseteq \{(4,2), (2,2)\}.$$

Temos

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, x \in A \wedge x = y^2\} \\ &= \{(2,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y^2 = 2\} \cup \{(3,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y^2 = 3\} \\ &\quad \cup \{(4,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y^2 = 4\} \\ &= \{(2,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2}\} \cup \{(3,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y = -\sqrt{3} \vee y = \sqrt{3}\} \\ &\quad \cup \{(4,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, y = -2 \vee y = 2\} \\ &= \emptyset \cup \emptyset \cup \{(4,-2), (4,2)\} \\ &= \{(4,-2), (4,2)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a,b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\} \\ &= \{(2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} D \setminus (A \times B) &= \{(a,b) \,|\, (a,b) \in D \wedge (a,b) \notin A \times B\} \\ &= \{(4,-2)\}. \end{aligned}$$

Assim, de $D \setminus (A \times B) \subseteq X$, resulta que $(4,-2) \in X$. Por outro lado, se $X \subseteq \{(4,2), (2,2)\}$, então todo o elemento de X tem de ser elemento de $\{(4,2), (2,2)\}$. Logo não pode existir qualquer conjunto nas condições indicadas pois $(4,-2) \in X$, mas $(4,-2) \notin \{(4,2), (2,2)\}$.

Resolução alternativa: Uma vez que $-2 \notin B$, então para todo $a \in A$, $(a,-2) \notin A \times B$. Então, como $(4,-2) \in D$, segue que $(4,-2) \in D \setminus (A \times B)$.
Assim, de $D \setminus (A \times B) \subseteq X$, resulta que $(4,-2) \in X$. Por outro lado, se $X \subseteq \{(4,2), (2,2)\}$, então todo o elemento de X tem de ser elemento de $\{(4,2), (2,2)\}$. Logo não pode existir qualquer conjunto nas condições indicadas pois $(4,-2) \in X$, mas $(4,-2) \notin \{(4,2), (2,2)\}$.

6. **Sejam A, B, C conjuntos. Indique quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras e quais podem ser falsas:**

   (a) **Se $A \cap B \cap C = \emptyset$, então $A \cap B = \emptyset \vee A \cap C = \emptyset$.**

   Esta afirmação não é necessariamente verdadeira.

   Consideremos $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{1, 4\}$. Então $A \cap B \cap C = \emptyset$, mas $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ e $A \cap C = \{1\} \neq \emptyset$.

   (b) **Se $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$, então $A \cap B \cap C = \emptyset$.**

   Esta afirmação é verdadeira para quaisquer conjuntos A, B, C.

   A prova segue por redução ao absurdo. Para tal admitamos que $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$ e que $A \cap B \cap C \neq \emptyset$. Então, como $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, existe um objecto x tal que $x \in A \cap B \cap C$. Logo $x \in A \cap B$ e $x \in C$. Mas, por hipótese, $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$, logo $x \in A \cap (B \setminus C)$. Assim, $x \in A \wedge (x \in B \setminus C)$, ou seja, $x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)$. Então $x \notin C$ (contradição). Logo, para quaisquer conjuntos A, B, C, se $A \cap B = A \cap (B \setminus C)$, então $A \cap B \cap C = \emptyset$.

   (c) Os conjuntos $\mathcal{P}(A \cup B)$ e $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ têm o mesmo número de elementos.

   Esta afirmação não é necessariamente verdadeira.

   Consideremos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Então

   $$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

   $$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}.$$

   O primeiro conjunto tem 8 elementos e o segundo tem 6.

   (d) $\mathcal{P}(A \times B) = \{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$.

   Esta afirmação não é necessariamente verdadeira.

   Representemos por P o conjunto $\{X \times Y \mid X \in \mathcal{P}(A) \wedge Y \in \mathcal{P}(B)\}$ e consideremos $A = \{1, 2\}$ e $B = \{3, 4\}$. Então $\{(1, 3), (2, 4)\} \in \mathcal{P}(A \times B)$, mas $\{(1, 3), (2, 4)\} \notin P$. De facto, se admitirmos que $\{(1, 3), (2, 4)\} = X \times Y$, para alguns $X \in \mathcal{P}(A)$ e $Y \in \mathcal{P}(B)$, então $1, 2 \in X$ e $3, 4 \in Y$. Logo $\{1, 2\} \times \{3, 4\} \subseteq X \times Y$ e, por conseguinte $X \times Y \neq \{(1, 3), (2, 4)\}$ (contradição).

7. Sejam A, B conjuntos. Mostre que $(A \times B) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times B$.

   Para qualquer objecto (x, y), temos

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times B) \setminus (B \times B) &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (B \times B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin B \vee y \notin B) \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin B) \quad \text{(distributividade)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin B) \vee (y \in B \wedge y \notin B) \quad \text{(elemento absorvente da conjunção)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin B) \quad \text{(elemento neutro da disjunção)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in B) \quad \text{(comutatividade)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in B \quad \text{(associatividade)} \\
&\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge y \in B \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \setminus B) \times B
\end{aligned}$$

   Logo $(A \times B) \setminus (B \times B) = (A \setminus B) \times B$.

Cotação:

1. (1,5 valores) **2.** (3,0 valores) **3.** (3,5 valores) **4.** (1,75 valores)
5. (3,0 valores) **6.** (5,5 valores) **7.** (1,75 valores)