Universidade do Minho
Departamento de Matemática 7 de janeiro de 2020

Tópicos de Matemática

Licenciatura em Ciências da Computação

Exame (Época de recurso)

duração: 2 horas

1. (a) **Considere as fórmulas proposicionais** $\varphi : q \to ((p \vee \neg q) \to \neg q)$ **e** $\psi : \neg(q \leftrightarrow p)$**. Diga, justificando, se a fórmula** ψ **é uma consequência lógica da fórmula** φ**.**

   A fómula ψ é uma consequência lógica de φ se a fórmula $\varphi \to \psi$ é uma tautologia.

   Da tabela de verdade seguinte conclui-se que $\varphi \to \psi$ não é uma tautologia, pois o seu valor lógico não é sempre verdadeiro, dependendo do valor lógico das variáveis proposicionais que nela ocorrem; se p e q tiverem, respetivamente, valor lógico falso, a fórmula $\varphi \to \psi$ tem valor lógico falso. Logo a fórmula ψ não é uma consequência lógica de φ.

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to \neg q$	φ	$p \leftrightarrow q$	ψ	$\varphi \to \psi$
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	0

   (b) **Considere que** p **representa a proposição** $\exists_{x\in D}\,(\forall_{y\in D}\,(y > x \to y + x$ **é ímpar**$))$**. Diga, justificando, se** p **é verdadeira para** $D = \{3, 4, 5, 6, 8\}$**. Indique, sem recorrer ao conetivo negação, uma proposição equivalente a** $\neg p$**.**

   A proposição p é verdadeira para $D = \{3, 4, 5, 6, 8\}$, uma vez que existe $a = 5 \in D$ tal que, para todo $b \in D$, a proposição

   $$b > a \to b + a \text{ é ímpar}$$

   é verdadeira. De facto, se $b \leq a$, a implicação anterior é verdadeira, pois o antecedente da implicação é falso; se $b > a$, tem-se $b = 6$ ou $b = 8$ e em qualquer destes casos $b + a$ é ímpar.

2. **Considere os conjuntos** $A = \{1, 3, 7, 8, \{5, 8\}, \{4, 7\}\}$**,** $B = \{x + 4 \,|\, x \in \mathbb{Z} \wedge 2x + 1 \in A\}$ **e** $C = \{1, 7, 8\}$**. Justificando, determine** $((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C$**.**

   Para qualquer $x \in \mathbb{Z}$, tem-se

   $$2x + 1 \in A \Leftrightarrow (2x + 1 = 1 \vee 2x + 1 = 3 \vee 2x + 1 = 7) \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 3\}.$$

   Logo

   $$\begin{aligned}
   &B = \{x + 4 \,|\, x \in \{0, 1, 3\}\} = \{4, 5, 7\},\\
   &\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 7\}, \{4, 5, 7\}\},\\
   &A \setminus \mathcal{P}(B) = \{1, 3, 7, 8, \{5, 8\}\},\\
   &(A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C = \{3, \{5, 8\}\},\\
   &((A \setminus \mathcal{P}(B)) \setminus C) \times C = \{(3, 1), (3, 7), (3, 8), (\{5, 8\}, 1), (\{5, 8\}, 7), (\{5, 8\}, 8)\}.
   \end{aligned}$$

3. **Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira para quaisquer conjuntos** A**,** B **e** C**.**

   (a) $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset \Rightarrow (A \cap C = \emptyset) \vee (B \cap D = \emptyset)$.

   A afirmação é verdadeira.

   No sentido de fazer a prova por redução ao absurdo, admitamos que $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ e $B \cap D \neq \emptyset$. Então, existem objetos x, y tais que $x \in A \cap C$ e $y \in B \cap D$, ou seja, tais que $x \in A \wedge x \in C$ e $y \in B \wedge y \in D$. Dado que $x \in A$ e $y \in B$, então $(x, y) \in A \times B$; por outro lado, como $x \in C$ e $y \in D$, tem-se $(x, y) \in C \times D$. Logo $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ (contradição). Assim, se $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$, tem-se $(A \cap C = \emptyset)$ ou $(B \cap D = \emptyset)$.

4. **Prove, por indução nos naturais, que**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$**.**

Para $n \in \mathbb{N}$, representemos por $p(n)$ o predicado

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(i) Base de indução ($n = 1$): Para $n = 1$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$

Logo $p(1)$ é verdadeiro.

(ii) Passo de indução: Seja $k \in \mathbb{N}$. Admitamos, por hipótese de indução, que $p(k)$ é verdadeiro, ou seja, que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Pretendemos mostrar que $p(k+1)$ é verdadeiro, ou seja, que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{k+2}.$$

Da hipótese de indução segue que

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} & = & \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
& = & 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
& = & 1 + \frac{-k-2+1}{(k+1)(k+2)} \\
& = & 1 + \frac{-k-1}{(k+1)(k+2)} \\
& = & 1 - \frac{1}{k+2}.
\end{array}$$

Logo, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$p(k) \Rightarrow p(k+1).$$

De (i), (ii) e do Princípio de Indução em $\mathbb{N}$, conclui-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(n)$ é verdadeiro.

5. **Considere a função** $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **definida da seguinte forma**

$$f(n) = \begin{cases} (n, n+1) & \textbf{se } n \textbf{ é par} \\ (n+1, n+2) & \textbf{se } n \textbf{ é ímpar} \end{cases}.$$

   (a) **Justificando, defina por extensão,** $f\big(\{0,1\}\big) \cap f\big(\{2,3\}\big)$ **e** $f^{\leftarrow}\left(\{(0,1),(1,2)\}\right)$**.**

   Tem-se

$$f\big(\{0,1\}\big) = \{f(0), f(1)\} = \{(0,1),(2,3)\}$$

   e

$$f\big(\{2,3\}\big) = \{f(2), f(3)\} = \{(2,3),(4,5)\},$$

   logo

$$f\big(\{0,1\}\big) \cap f\big(\{2,3\}\big) = \{(2,3)\}.$$

   (b) Diga, justificando, se f é injetiva e se é sobrejetiva. Justifique que não existe qualquer função $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$.

6. Sejam R e S relações binárias num conjunto A. Mostre que se R, S e $R \circ S$ são relações simétricas, então $R \circ S = S \circ R$.

7. Seja $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (a) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

i. Para toda a relação de equivalência ρ em A

$$(\exists_{k \in A}\ [2]_\rho \cap [k]_\rho \neq \emptyset \text{ e } [3]_\rho \cap [k]_\rho \neq \emptyset) \Rightarrow [2]_\rho = [3]_\rho.$$

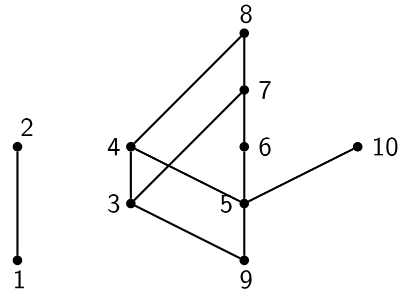
ii. Existe uma relação de equivalência ρ em A tal que $A/\rho = \{A, A \setminus \{1\}\}$.

(b) Seja R a relação de equivalência definida em A por

$$x \, R \, y \text{ se só se } xy^{-1} \in \{-1, 1\}.$$

Determine $[2]_R$ e A/R.

8. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $\leq$ é a relação de ordem parcial definida pelo diagrama de Hasse



$\overrightarrow{(v.s.f.f)}$

Indique, caso exista(m):

(a) os elementos maximais e os elementos minimais de A.

(b) o supremo de $\{3,5\}$ e o ínfimo de $\{4,6\}$.

(c) um subconjunto B de A tal que B tenha elemento máximo e elemento mínimo e $(B, \leq_{|_B})$ não seja um reticulado.

9. Sejam A e B conjuntos. Mostre que se B não é contável e existe uma função sobrejetiva $f : A \to B$, então A não é contável.

Cotações	1.	2.	3.	4.	5	6.	7.	8.	9.	10.
	1,0 + 1,0	1,0	1,0	1,0 + 1,5	1,75	1,25 + 1,0 + 1,0	1,25 + 1,0	0,75 + 0,75 + 1,25	0,75 + 0,75 + 0,75	1,25