Tópicos de Matemática

Univ. do Minho – Lic. em Ciências da Computação

exame 29 de janeiro de 2019

Este enunciado tem **duas** páginas.

1. Considere a fórmula $\varphi = (p \wedge q) \to (q \vee \sim r)$.
   a) Diga, justificando, se φ é uma tautologia. (1,5 valores)
   b) Dê exemplo de uma fórmula ψ (distinta de φ) tal que a seguinte frase seja verdadeira: «φ ser verdadeira é condição suficiente para que ψ seja verdadeira». Justifique. (1 valor)

2. Mostre, por contraposição, que o produto dum número racional não-nulo por um número irracional é irracional. (1 valor)

3. Escreva em linguagem simbólica com quantificadores a proposição: «Todas as soluções reais da desigualdade $x^3 - 3x < 3$ são menores do que 10». (1 valor)

4. Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte proposição:
$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ \exists_{z\in\mathbb{R}}\ \ x + z = y - z.$$
(1,5 valores)

5. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. (2 valores)

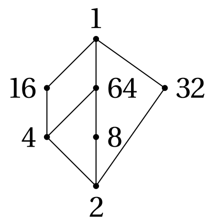
6. Considere os conjuntos $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid n^2 \in [0,1] \right\}$, $B = \{0,1,2\}$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$, $C_i = \{-i, 0, i\}$. Determine cada um dos conjuntos seguintes:
   a) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
   b) $\mathcal{P}(B \cap C_2)$. (2 valores)

7. Sejam $\{ A_i \mid i \in I \}$ e $\{ B_i \mid i \in I \}$ duas famílias de conjuntos, indexadas pelo mesmo conjunto de índices I. Mostre que
$$\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_i) \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right).$$
(2 valores)

8. Sejam A e B conjuntos e R uma relação de A para B. Diga, justificando, se é necessariamente verdade que $R^{-1} \subseteq \mathrm{CDom}(R) \times \mathrm{Dom}(R)$. (1 valor)

9. Em $\mathbb{N}^2$, considere a relação binária Z definida por
$$(a,b)\ Z\ (c,d) \quad \text{se e só se} \quad a + d = b + c.$$
   a) Mostre que Z é uma relação de equivalência. (2 valores)
   b) Determine dois elementos distintos da classe $[(3,1)]_Z$. (1 valor)

10. Considere o c.p.o. $(X, \preceq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse.



a) Indique, caso existam

   i) $\text{ínf}\,\{1, 16, 64\}$;

   ii) $\text{máx}\,\{2, 4, 8, 16\}$;

   Justifique. (1 valor)

b) Indique dois subconjuntos A, B de X, tais que A tenha exatamente dois elementos maximais e um minimal e B tenha três elementos maximais, apresentando esses elementos. (1 valor)

11. Considere funções $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$ e $\begin{array}{rcl} g : X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$ $(X \subseteq \mathbb{R}, Y \subseteq \mathbb{R})$.

a) Diga, justificando, se f é injetiva.

b) Diga, justificando, se f é sobrejetiva.

c) Apresente conjuntos X, Y tal que g seja invertível. (1,5 valores)

12. Considere o conjunto $T = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$. Indique, justificando, um conjunto A tal que $A \neq T$ mas $A \sim T$. (0,5 valores)