Universidade do Minho - 2022/23
Departamento de Matemática

# Exercícios (com algumas resoluções) de Tópicos de Matemática

Paula Mendes Martins

1º ano - Licenciatura em Ciências da Computação

# 1 preliminares de lógica

1. Das seguintes expressões, indique aquelas que são proposições:
   (a) A Terra é redonda.
   (b) Hoje está sol.
   (c) $2 + x = 3$ e 2 é par.
   (d) $(25 \times 2 + 7)$.
   (e) Vai dormir!
   (f) 2 é ímpar ou 3 é múltiplo de 4.
   (g) Portugal Continental tem 18 distritos.
   (h) Qual é o conjunto de soluções inteiras da equação $x^2 - 1 = 0$?
   (i) $4 < 3$.
   (j) Eu gosto de fruta e tu pensas frequentemente em visitar Espanha.
   (k) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   (l) Telefona-me na quinta-feira se estiveres em casa.
   (m) $2 + 3 = 5$.
   (n) $x + y = z$.
   (o) Será que amanhã vai nevar?

2. Das seguintes proposições, indique aquelas que são proposições simples e aquelas que são compostas.
   (a) A Matemática é a disciplina preferida do Jaime.
   (b) Se vais tomar café ao CPI, então eu vou contigo.
   (c) Chegou o Outono e os dias são mais curtos.
   (d) Estas questões são bastante fáceis para mim.
   (e) Hoje, o António vai ao teatro ou vai ao cinema.
   (f) No hemisfério Sul, o mês de Julho não é um mês de Verão.
   (g) Consegues chegar a horas à aula se te despachares a tomar o pequeno-almoço.

   Resolução

   As proposições (a) e (d) são proposições simples. As restantes são proposições compostas. A proposição (b) faz uso do conectivo de implicação, a proposição (c) do conectivo de conjunção, a proposição (e) do conectivo de disjunção, a proposição (f) do conectivo de negação. Finalmente, a proposição (g) faz uso dos conectivos de implicação e conjunção.

3. Sejam $x =$ "Eu estou feliz.", $y =$ "Eu estou a ver um filme." e $z =$ "Eu estou a comer pipocas.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

   (a) $z \Rightarrow x$
   (b) $x \Leftrightarrow y$
   (c) $(y \vee z) \Rightarrow x$
   (d) $y \vee (z \Rightarrow x)$
   (e) $(y \Rightarrow \sim x) \wedge (z \Rightarrow \sim x)$
   (f) $(x \wedge \sim y) \Leftrightarrow (y \vee z)$

4. Sejam $p =$ "Eu gosto de fruta.", $q =$ "Eu não gosto de cereais." e $r =$ "Eu sei fazer uma omolete.". Traduza as seguintes proposições em palavras:

   (a) $p \wedge q$
   (b) $q \vee r$
   (c) $\sim r$
   (d) $\sim (p \vee q)$
   (e) $\sim p \vee \sim q$
   (f) $\sim p \wedge q$
   (g) $(r \vee p) \wedge q$
   (h) $r \wedge (p \vee q)$
   (i) $\sim p \wedge r$

5. Considere as seguintes proposições:

$p$: "7 é um número inteiro par", $q$: "$3+1=4$", $r$: "24 é divisível por 8".

(a) Escreva em linguagem lógica as afirmações:

i. $3+1 \neq 4$ e 24 é divisível por 8;

ii. não é verdade que 7 seja ímpar ou $3+1=4$;

iii. se $3+1=4$ então 24 não é divisível por 8.

(b) Traduza por frases cada uma das seguintes proposições:

i. $p \vee (\sim r)$; ii. $\sim (p \wedge q)$; iii. $(\sim r) \Rightarrow (\sim q \vee p)$.

6. Considere as seguintes proposições:

$p$: "vou à praia", $q$: "apanho o combóio", $r$: "está a chover".

(a) Traduza por frases cada uma das seguintes proposições:

i. $\sim (r \vee p)$;

ii. $\sim r \vee p$;

iii. $(\sim q \vee r) \Rightarrow \sim p$.

7. Considerando que $p$ representa a proposição "O João cai." e que $q$ representa a proposição "O João magoa-se.", escreva simbolicamente as seguintes proposições:

(a) O João cai e magoou-se.

(b) O João caiu mas não se magoou.

(c) Sempre que o João cai, magoa-se.

(d) O João só se magoa se cair.

(e) O João magoa-se exatamente quando cai.

Resolução

(a) $p \wedge q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "o João cai e o João magoa-se");

(b) $p \wedge \sim q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "O joão cai e o joão não se magoa");

(c) $p \Rightarrow q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "Se o João cai então o João magoa-se");

(d) $q \Rightarrow p$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "Se o João se magoou então o João caiu");

(e) $p \Leftrightarrow q$ (a frase apresentada pode ser reescrita como "O joão magoa-se se e só se o João cai").

8. Sejam $p =$"O Vítor é mais alto que o Manuel.", $q =$"O Pedro é mais baixo que o Manuel.", $r =$"O Pedro e o Vítor são da mesma estatura." e $s =$"O Vítor é o mais alto dos três.". Escreva simbolicamente as proposições que se seguem:

(a) O Vítor é mais alto que o Manuel mas não é o mais alto dos três.

(b) Se o Vítor é mais alto que o Manuel e o Pedro é mais baixo que o Manuel, então o Vítor é o mais alto dos três.

(c) Se o Pedro e o Vítor são da mesma estatura, então o Pedro não é mais baixo que o Manuel ou o Vítor não é mais alto que este último.

(d) O Pedro não é mais baixo que o Manuel se o Vítor não é o mais alto dos três.

(e) O Vítor é o mais alto dos três ou não é mais alto que o Manuel.

(f) O Vítor só é o mais alto dos três se o Pedro não for da mesma estatura que ele.

9. Sejam $e =$ “A casa é azul.”, $f =$“A casa tem 30 anos.” e $g =$“A casa é feia.”. Traduza as seguintes proposições em símbolos:

   (a) Se a casa tem 30 anos então é feia.

   (b) Se a casa é azul então a casa é feia ou tem 30 anos.

   (c) Se a casa é azul então é feia ou a casa tem 30 anos.

   (d) A casa só não é feia se não tem 30 anos.

   (e) A casa tem 30 anos se for azul e a casa não é feia se tem 30 anos.

   (f) Para a casa ser feia é necessário e suficiente que tenha 30 anos.

10. Suponha que o Manuel gosta da cor azul, não gosta da cor vermelha, gosta da cor amarela e não gosta da cor verde. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

    (a) O Manuel gosta de azul e de vermelho.

    (b) O Manuel gosta de amarelo ou verde e o Manuel não gosta de vermelho.

    (c) O Manuel gosta de vermelho ou o Manuel gosta de azul e amarelo.

    (d) O Manuel gosta de azul ou amarelo e o Manuel gosta de vermelho ou verde.

    (e) Se o Manuel gosta de azul então gosta de amarelo.

    (f) O Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

    (g) O Manuel gosta de verde e se o Manuel gosta de amarelo então gosta de azul.

    (h) Se o Manuel gosta de amarelo então gosta de verde ou o Manuel gosta de amarelo se e só se gosta de vermelho.

11. Suponha que $p$ é uma proposição verdadeira, $q$ é uma proposição falsa, $r$ é uma proposição falsa e $s$ é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

    (a) $p \vee r$ (c) $(s \wedge p) \vee (q \wedge r)$ (e) $(q \Leftrightarrow s) \wedge p$

    (b) $\sim s \vee \sim r$ (d) $p \Leftrightarrow r$ (f) $(s \Rightarrow p) \Leftrightarrow \sim (r \vee q)$

12. Sejam $p, q$ e $r$ proposições. Se a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira, o que se pode dizer sobre o valor lógico das seguintes proposições?

    (a) $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ (b) $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$ (c) $\sim p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$

    Resolução

    Dizer que a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira é o mesmo que afirmar que a proposição $p$ é falsa ou a proposição $q$ é verdadeira.

    (a) Sabemos que a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é falsa quando, e apenas quando, $p \vee r$ é verdadeira e $q \vee r$ é falsa.

    Se $p$ é falsa, então, $p \vee r$ só é verdadeira se $r$ é verdadeira. Mas, neste caso, $q \vee r$ é verdadeira e, portanto, $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é também verdadeira.

    Se $q$ é verdadeira, a proposição $q \vee r$ é verdadeira e, neste caso, a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é verdadeira.

    Assim, nas condições dadas, a proposição $p \vee r \Rightarrow q \vee r$ é verdadeira.

(b) Se $p$ é falsa. $p \wedge r$ é também falsa (independentemente da valoração de $r$) e, por isso, $p \wedge r \Rightarrow q \wedge r$ é verdadeira.

(c) Se $q$ é verdadeira, a proposição $p \vee q$ é verdadeira e, portanto, a proposição $\sim p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é verdadeira.

Se $p$ é falsa, $\sim p$ é verdadeira e, por isso, $\sim p \wedge q$ e $p \vee q$ têm a mesma valoração de $q$. Logo, as proposições $\sim p \wedge q$ e $p \vee q$ são ambas falsas ou são ambas verdadeiras. Em qualquer um dos casos, a proposição $\sim p \wedge q \Rightarrow p \vee q$ é verdadeira.

13. Suponha que $p$ é uma proposição verdadeira, $q$ é uma proposição falsa, $r$ é uma proposição falsa e $s$ é uma proposição verdadeira. Quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas?

(a) $(r \wedge s) \vee q$
(b) $\sim (p \wedge q)$
(c) $r \vee (s \vee (p \wedge q))$
(d) $r \Rightarrow q$
(e) $s \Rightarrow (p \Rightarrow \sim s)$
(f) $((q \Rightarrow s) \Leftrightarrow s) \wedge \sim p$

14. Se $a$ e $b$ são proposições verdadeiras e $c$ é falsa, qual é o valor lógico de cada uma das seguintes proposições?

(a) $a \vee c$
(b) $a \wedge c$
(c) $\sim a \wedge \sim c$
(d) $a \Leftrightarrow \sim b \vee c$
(e) $b \vee \sim c \Rightarrow a$
(f) $(b \vee a) \Rightarrow (b \Rightarrow \sim c)$
(g) $(b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow c)$
(h) $(b \Rightarrow a) \Rightarrow ((a \Rightarrow \sim c) \Rightarrow (\sim c \Rightarrow b))$

15. Construa tabelas de verdade para cada uma das seguintes fórmulas proposicionais:

(a) $\sim (p \wedge q)$
(b) $\sim p \vee q$
(c) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$
(d) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
(e) $p \vee (\sim q \vee r)$
(f) $\sim (p \wedge (q \vee \sim p))$
(g) $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
(h) $\sim (p \Rightarrow \sim p)$
(i) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$
(j) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
(k) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
(l) $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim (p \wedge q)$
(m) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$
(n) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Resolução

(c) Como temos três proposições simples, a tabela de verdade vai ter $8 (= 2^3)$ linhas, correspondentes aos 8 casos possíveis. A tabela de verdade para esta proposição é:

| $p$ | $q$ | $r$ | $\sim p$ | $p \vee q$ | $\sim p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |

(i) Como temos duas proposições simples, a tabela de verdade vai ter $4 (= 2^2)$ linhas. Temos:

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow p$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q)$ | $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

16. Sejam $a, b$ e $c$ proposições. Se $a \Leftrightarrow b$ é falsa, o que se pode dizer sobre o valor lógico das seguintes proposições?

    (a) $a \wedge b$ (b) $a \vee b$ (c) $a \Rightarrow b$ (d) $a \wedge c \Leftrightarrow b \wedge c$

17. De entre as seguintes fórmulas proposicionais, indique aquelas que são tautologias e aquelas que são contradições:

    (a) $p \Rightarrow (p \vee q)$
    (b) $(p \Rightarrow (p \vee q)) \wedge q$
    (c) $\sim (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
    (d) $p \vee (\sim p \wedge q)$
    (e) $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
    (f) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
    (g) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$
    (h) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
    (i) $\sim (p \Rightarrow (q \Rightarrow p))$
    (j) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$
    (k) $(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim (q \wedge r)$
    (l) $((p \Leftrightarrow \sim q) \wedge p) \wedge q$

    Resolução

    (c) Começamos por construir a tabela de verdade relativa a esta proposição

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\sim (p \wedge q)$ | $p \vee q$ | $\sim (p \wedge q) \Rightarrow p \vee q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ |

Como há situações onde é verdadeira e situações onde é falsa, a proposição $\sim (p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ não é tautologia nem é contradição.

(i) A tabela de verdade relativa a esta proposição é

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $\sim p \vee q$ | $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ |

Como em todas as situações a proposição composta é falsa, a proposição $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ é uma contradição.

(j) A tabela de verdade relativa a esta proposição é

| $p$ | $q$ | $\sim p$ | $p \vee q$ | $\sim p \Rightarrow q$ | $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |

Como em todas a situações a proposição $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$ é verdadeira, esta proposição é uma tautologia.

18. Indique quais das seguintes proposições são tautologias e quais são contradições.

(a) Se a Joana come chocolate, então a Joana come chocolate ou não come chocolate.

(b) Se os hipopótamos têm asas e não têm asas, então a Terra é quadrada.

(c) Se a Sofia vai ao cinema então a Marta está a comer bolo, mas a Marta não está a comer bolo e a Sofia vai ao cinema.

(d) Os gatos bebem leite ou água e os gatos bebem água sempre que bebem leite.

(e) A galinha é castanha ou o pato é branco se e só se o pato é branco e a galinha não é castanha.

19. Sejam $f$ uma fórmula proposicional, $t$ uma tautologia e $c$ uma contradição. Mostre que:

(a) $f \vee t$ é uma tautologia.
(b) $f \wedge c$ é uma contradição.
(c) $c \Rightarrow f$ é uma tautologia.
(d) $f \Rightarrow t$ é uma tautologia.

20. Indique, justificando, se é ou não verdade que para quaisquer fórmulas proposicionais $f_1$ e $f_2$ se tem:

(a) se $f_1 \wedge f_2$ é uma tautologia então $f_1$ e $f_2$ são tautologias.

(b) Se $f_1 \vee f_2$ é uma tautologia então $f_1$ é uma tautologia ou $f_2$ é uma tautologia.

21. Indique quais dos pares de fórmulas proposicionais que se seguem são logicamente equivalentes:

(a) $\sim (p \wedge q)$; $\sim p \wedge \sim q$.
(b) $p \Rightarrow q$; $q \Rightarrow p$.
(c) $\sim (p \Rightarrow q)$; $p \wedge (q \Rightarrow (p \wedge \sim p))$.
(d) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$; $\sim (\sim r \Rightarrow \sim q) \Rightarrow \sim p$.

22. Em cada uma das alíneas que se seguem, verifique se as duas fórmulas proposicionais dadas são logicamente equivalentes:

(a) "Se chover então eu vou ao cinema." e "Não está a chover ou eu vou ao cinema."

(b) "Esta camisola é às riscas e esta camisola é de manga curta ou tem gola alta." e "Esta camisola é às riscas e é de manga curta ou esta camisola tem gola alta."

(c) "Não é verdade que eu gosto de maçãs e laranjas." e "Eu não gosto de maçãs e não gosto de laranjas."

(d) "Este gato é persa ou este gato gosta de peixe e dorme muito." e "Este gato é persa ou gosta de peixe e este gato dorme muito."

(e) "Não é verdade que este carro é rápido se e só se é novo." e "Este carro é rápido e novo ou este carro não é rápido ou não é novo."

23. Escreva cada uma das seguintes fórmulas proposicionais em termos da disjunção e da negação, ou seja, para cada uma das fórmulas, encontre uma outra fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas os conectivos $\vee$ e $\sim$.

(a) $p \wedge q$
(b) $p \Rightarrow q$
(c) $p \Leftrightarrow q$.

Resolução

(a) Usando tautologias conhecidas podemos escrever

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim (\sim p) \wedge \sim (\sim q)) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q).$$

Assim, temos que $p \wedge q$ é logicamente equivalente a $\sim (\sim p \vee \sim q)$.

(b) $p \Rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim p \vee q$.

(c) usando tautologias conhecidas podemos escrever

$$\begin{aligned}(p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]\\ &\Leftrightarrow [\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))].\end{aligned}$$

Assim, temos que $p \Leftrightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))$.

24. Escreva cada uma das seguintes fórmulas proposicionais em termos da conjunção e da negação, ou seja, para cada uma das fórmulas, encontre uma outra fórmula que lhe seja logicamente equivalente e que envolva apenas os conectivos $\wedge$ e $\sim$.

    (a) $p \vee q$ (b) $p \Rightarrow q$ (c) $p \Leftrightarrow q$.

25. Numa cidade os habitantes são de dois tipos: os que mentem sempre (F) e os que dizem sempre a verdade (V). Consideremos $3$ habitantes A, B e C dessa cidade. Em cada uma das alíneas, diga se é possível determinar o tipo (V ou F) de cada um desses habitantes, sabendo que eles disseram:

    (a) A: B e C são F's
    B: A é V
    C: A é F

    (b) A: B e C são do mesmo tipo
    B: eu e C somos V's
    C: B é F

26. Dê exemplo de uma fórmula proposicional que se comporte como:

    (a) Elemento neutro para a conjunção.
    (b) Elemento neutro para a disjunção.
    (c) Elemento absorvente para a conjunção.
    (d) Elemento absorvente para a disjunção.

27. Tendo em conta que a proposição $p$ *ou* $q$ *mas não ambos*, que se designa por *ou exclusivo*, se denota por $p\dot{\vee}q$:

    (a) Determine a tabela de verdade de $p\dot{\vee}q$ e, utilizando apenas os operadores lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$, encontre uma fórmula logicamente equivalente a $p\dot{\vee}q$.
    (b) Mostre que $p\dot{\vee}q$ é equivalente a $\sim (p \Leftrightarrow q)$.
    (c) Averigue se a fórmula proposicional $p\dot{\vee}q \Leftrightarrow \sim p \dot{\vee} \sim q$ é ou não uma tautologia.
    (d) Construa as tabelas de verdade para $p\dot{\vee}p$, $(p\dot{\vee}q)\dot{\vee}r$ e $(p\dot{\vee}p)\dot{\vee}p$

    Resolução

    (a) A proposição $p$ *ou* $q$ *mas não ambos* é obviamente falsa quando e apenas quando as proposições $p$ e $q$ são ambas falsas ou ambas verdadeiras. Assim, a tabela de verdade da proposição $p\dot{\vee}q$ é

| $p$ | $q$ | $p\dot{\vee}q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

É também óbvio que $p$ *ou* $q$ *mas não ambos* é logicamente equivalente a $p$ *e não* $q$ *ou* $q$ *e não* $p$, i.e.,

$$p\dot{\vee}q \text{ é logicamente equivalente a } (p \wedge (\sim q)) \vee (\sim p \wedge q).$$

(b) A proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando, e apenas quando, as proposições $p$ e $q$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas. A proposição $p\dot{\vee}q$ é falsa quando, e apenas quando, as proposições $p$ e $q$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas. Logo, esta proposição é logicamente equivalente à negação da primeira.

(c) Utilizando a alínea (a) e tautologias conhecidas, temos que

$$\begin{aligned}(p\dot{\vee}q) \quad &\Leftrightarrow [(p \wedge (\sim q)) \vee (\sim p \wedge q)]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q))]\\ &\Leftrightarrow [(\sim p \wedge \sim (\sim q)) \vee (\sim (\sim p) \wedge (\sim q))]\\ &\Leftrightarrow [\sim p \dot{\vee} \sim q].\end{aligned}$$

Logo, a fórmula proposicional $p\,\dot{\vee} q \Leftrightarrow \sim p\,\dot{\vee} \sim q$ é uma tautologia.

(d) As três tabelas de verdade pedidas são:

| $p$ | $p\dot{\vee}p$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ |

| $p$ | $q$ | $r$ | $p\dot{\vee}q$ | $(p\dot{\vee}q)\dot{\vee}r$ |
|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

| $p$ | $p\dot{\vee}p$ | $(p\dot{\vee}p)\dot{\vee}p$ |
|---|---|---|
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

.

28. Considere o conectivo de Sheffer, $|$, definido pela tabela de verdade

| $p$ | $q$ | $p \mid q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $F$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

e mostre que:

(a) $p \mid q$ é equivalente a $\sim p \vee \sim q$;

(b) $\sim p$ é equivalente a $p \mid p$;

(c) $p \wedge q$ é equivalente a $(p \mid q) \mid (q \mid p)$;

(d) $p \vee q$ é equivalente a $(p \mid p) \mid (q \mid q)$;

(e) $p \Rightarrow q$ é equivalente a $p \mid (q \mid q)$.

29. Exprima cada uma das seguintes proposições como uma quantificação:

(a) A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais.

(b) 1000000 não é o maior número natural.

(c) A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3.

(d) Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional.

(e) Existe um único número real $x$ tal que para todo o número real $y$, $xy + x - 4 = 4y$.

Resolução

(a) A frase "A equação $x^3 = 28$ tem solução nos números naturais." pode ser reescrita como "Existe pelo menos um número natural que é solução da equação $x^3 = 28$.". Assim, podemos escrever
$$\exists x \in \mathbb{N} : x^3 = 28.$$

(b) A frase "1000000 não é o maior número natural." pode ser reescrita como "Não é verdade 1000000 seja maior que qualquer número natural.". Assim, temos
$$\sim (\forall n \in \mathbb{N},\ 1000000 > n)\,.$$

(c) A frase "A soma de três números naturais consecutivos é um múltiplo de 3." pode ser reescrita como "Para qualquer número natural, a sua soma com os dois números seguintes é um múltiplo de 3". A "soma ser um múltiplo de 3" significa que existe um natural $k$ para o qual a soma é $3k$. Assim, utilizando quantificadores, a frase inicial pode ser escrita como
$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : x + (x+1) + (x+2) = 3k.$$

(d) A frase "Entre cada dois números racionais distintos existe um outro número racional." pode ser reescrita como
$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, x \neq y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{Q} : x < z < y).$$

(e) A frase "Existe um único número real $x$ tal que para todo o número real $y$, $xy + x - 4 = 4y$." pode ser reescrita como
$$\exists^1 x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, xy + x - 4 = 4y.$$

30. Reescreva as seguinte afirmações como proposições com quantificadores, tanto em símbolos como em português:

(a) As pessoas são simpáticas.

(b) Um amigo ofereceu-me um presente.

(c) Os gatos gostam de comer peixe e dormir a sesta.

(d) Eu gostei de um dos livros que li no Verão passado.

(e) Ninguém gosta de comer gelado e pickles em simultâneo.

31. Suponha que o domínio de variação de $x$ é o conjunto de todas pessoas. Sejam $p(x) =$"$x$ tem cabelo verde.", $q(x) =$"$x$ gosta de pipocas." e $r(x) =$"$x$ tem um sapo como animal de estimação." Traduza as seguintes proposições com palavras:

(a) $(\forall x)\ p(x)$.

(b) $(\exists x)\ q(x)$.

(c) $(\forall x)\ [r(x) \wedge q(x)]$.

(d) $(\exists x)\ [p(x) \implies r(x)]$.

(e) $(\forall x)\ [r(x) \iff \sim q(x)]$.

32. Suponha que o domínio de variação de $x$ e $y$ é o conjunto de todos os carros. Sejam $l(x, y) =$"$x$ é mais rápido que $y$.", $m(x, y) =$"$x$ é mais caro que $y$." e $n(x, y) =$"$x$ é mais antigo que $y$." Traduza as seguintes proposições com palavras:

(a) $(\exists x)(\forall y)\ l(x,y)$.

(b) $(\forall x)(\exists y)\ m(x,y)$.

(c) $(\exists y)(\forall x)\ [l(x,y) \vee n(x,y)]$.

(d) $(\forall y)(\exists x)\ [\sim m(x,y) \implies l(x,y)]$.

33. Suponha que o conjunto de variação de $y$ é o conjunto de todas as vacas. Sejam $p(y)$ =“$y$ é castanha.”, $q(y)$ =“$y$ tem 4 anos de idade.” e $r(y)$ =“$y$ tem manchas brancas.”. Traduza as seguintes proposições em símbolos matemáticos:

    (a) Existe uma vaca castanha.

    (b) Todas as vacas têm 4 anos de idade.

    (c) Existe uma vaca castanha com manchas brancas.

    (d) Todas as vacas de 4 anos de idade têm manchas brancas.

    (e) Existe uma vaca que se tem 4 anos de idade então não tem manchas brancas.

    (f) Todas as vacas são castanhas se e só se não têm 4 anos de idade.

    (g) Não existem vacas castanhas.

    Resolução

    Se representarmos por $V$ o conjunto de todas as vacas, temos:

    (a) $\exists y \in V : p(y)$;

    (b) $\forall y \in V, q(y)$;

    (c) $\exists y \in V : p(y) \wedge r(y)$.

    (d) $\forall y \in V, q(y) \Rightarrow r(y)$;

    (e) $\exists y \in V : q(y) \Rightarrow \sim r(x)$;

    (f) $\forall y \in V : p(x) \Leftrightarrow \sim q(x)$;

    (g) $\sim (\exists y \in V : p(y)$

34. Considere a seguinte proposição:

    “Todas as raparigas são boas alunas a Matemática”.

    Indique qual ou quais das seguintes proposições equivale(m) à negação da proposição anterior:

    (a) Todas as raparigas são más alunas a Matemática.

    (b) Nem todas as raparigas são boas alunas a Matemática.

    (c) Existe pelo menos uma rapariga que é má aluna a Matemática.

    (d) Nem todas as raparigas são más alunas a Matemática.

35. Estude a veracidade de cada uma das seguintes afirmações:

    (a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N},\ x < y$;

    (c) $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N},\ x < y$;

    (d) $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (e) $\exists x, y \in \mathbb{N} :\ x < y$;

    (f) $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x < y$.

36. Indique, justificando, se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa.

    (a) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \exists x \in \mathbb{R} : x^2 = a$;

    (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists a \in \mathbb{R} : a + x = 0$;

    (c) $\exists a \in \mathbb{R} :\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ a + x = 0$;

    (d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists a \in \mathbb{R} : ax = 0$;

    (e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$;

    (f) $\forall y \in \mathbb{R} :\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ x < y$;

    (g) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x = y \Rightarrow x^2 = y^2$;

    (h) $\forall a \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

37. Escreva a negação de cada uma das seguintes proposições.

    (a) Todos os rapazes são simpáticos.
    (b) Existem morcegos que pesam 50 ou mais quilogramas.
    (c) A inequação $x^2 - 2x > 0$ verifica-se para todo o número real $x$.
    (d) Existe uma casa tal que qualquer pessoa que lá entre fica com sardas.
    (e) Existe um número natural que é maior que todos os outros números naturais.

38. (a) Usando a condição $p(x, y) =$ "$x$ gosta de $y$", exprima por meio de uma proposição lógica a afirmação:
        i. "Toda a gente tem alguém que gosta de si";
        ii. "As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias".
    (b) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a)i. e escreva uma afirmação que traduza essa negação.

Resolução.

(a) Representemos o conjunto das pessoas por P.

i. A frase pode ser traduzida por "Para qualquer pessoa $x$, existe uma pessoa $y$ tal que $y$ gosta de $x$". Assim, temos a proposição:

$$\forall x \in P, \exists y \in P : p(y, x).$$

ii. A frase pode ser traduzida por "Se toda a gente gosta de uma pessoa $x$, então $x$ també gosta de $x$. Assim, temos

$$\forall x, y \in P p(y, x) \Rightarrow p(x, x).$$

(b) Para negar a afirmação de i. podemos usar a frase "Não é verdade que toda a gente tem alguém que gosta de si".

Para escrever esta frase como uma afirmação, usamos uma das segundas leis de de Morgan. Temos

$$\sim (\forall x \in P, \exists y \in P : p(y, x)) \Leftrightarrow \exists x \in P : \forall y \in P, \sim p(y, x)$$

ou seja, a negação da afirmação i. pode ser traduzida por "Existe alguém de quem ninguém gosta."

39. Considere a condição $a(x, y) =$ "$x$ é amigo de $y$". Sabendo que as variáveis $x$ e $y$ têm por domínio o conjunto dos alunos que frequentam Tópicos de Matemática, exprima por meio de uma proposição lógica as seguintes afirmações:

    (a) "Todos os alunos de Tópicos de Matemática têm amigos que frequentam Tópicos de Matemática";
    (b) "Todos os alunos de Tópicos de Matemática têm um amigo em comum que frequenta Tópicos de Matemática".

40. Para cada uma das seguintes alíneas, identifique as hipóteses e as conclusões:

    (a) Para ser eleito presidente é suficiente ser político;
    (b) Para ser eleito presidente é necessário ser político;
    (c) Para ser rico basta ter pais ricos;

(d) Uma condição necessária para entender ciências de computação é ter um conhecimento completo de matemática discreta;

(e) Uma condição suficiente para se ter notas boas é trabalhar muito;

(f) Só se eu acordar cedo é que vamos ao jogo;

(g) O programa só corre se não houver erros tipográficos.

41. Utilizando, convenientemente, a lógica dedutiva, averigue a veracidade dos seguintes argumentos:

(a)
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \vee q) \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{l} l \Rightarrow m \\ (m \vee n) \Rightarrow (l \vee k) \\ \sim p \wedge l \\ \hline k \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow q \\ \sim p \Rightarrow r \\ \hline \sim r \Rightarrow \sim q \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{l} (\sim p \vee q) \Rightarrow r \\ s \wedge \sim q \\ \sim t \\ p \Rightarrow t \\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow \sim s \\ \hline \sim q \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \sim (p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \\ r \Rightarrow s \\ q \wedge \sim s \\ \hline \sim p \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{l} a \Rightarrow (b \vee c) \\ a \wedge \sim b \\ \hline c \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{l} e \Rightarrow f \\ \sim g \Rightarrow \sim f \\ h \Rightarrow i \\ e \wedge f \\ \hline g \wedge i \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \vee s \\ \sim s \Rightarrow \sim t \\ \sim q \vee s \\ \sim s \\ (\sim p \wedge r) \Rightarrow u \\ w \vee t \\ \hline u \wedge w \end{array}$$

Resolução

(a) Consideramos, pela ordem com que são apresentadas, as seguintes deduções:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline p \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \\ \hline p \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ (p \vee q) \Rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

Assim, o argumento apresentado é válido.

(d) O argumento é válido uma vez que temos a hipótese $s \wedge \sim q$, donde podemos concluir $\sim q$. As outras hipóteses são dispensáveis.

**Observação:** Repare que mesmo que as outras hipóteses entrem em contradição com a hipótese considerada, o argumento será sempre válido. de facto, se houver contradição nas hipóteses estamos perante uma implicação onde o antecedente é falso, pelo que a implicação é sempre verdadeira.

42. Utilizando, convenientemente, a lógica dedutiva, averigue a veracidade dos seguintes argumentos:

(a) O João afirma: "Hoje vou ao cinema ou fico em casa a ver um filme na televisão". No dia seguinte o João comentou: "Ontem não fui ao cinema." Em resposta, a Joana concluiu: "Então viste um filme na televisão!".

(b) O João disse: "Se existe uma armadilha nesta estrada, nós não chegaremos sem nos magoarmos". Uns minutos depois, Joana deu uma queda, magoou-se e replicou: "Havia uma armadilha nesta estrada!".

(c) A Maria afirmou: "Se hoje chover e fizer frio, vai nevar". No dia seguinte a Maria comentou: "Ontem fez frio e nevou." Em resposta, a Rita concluiu: "Então choveu".

(d) O Tiago disse: "Vou almoçar ao McDonald's ou à Pizza Hut". E acrescentou: "Se comer no McDonald's fico mal disposto e não vou ao cinema". Nesse dia, a Joana encontrou o Tiago no cinema e concluiu: "O Tiago foi almoçar à Pizza Hut"

43. Considere os seguintes argumentos, analise-os e diga, justificando, se são ou não válidos:

(a) Se eu comprar um carro novo não poderei ir ao Alentejo na Páscoa. Como vou ao Alentejo na Páscoa, não comprarei um carro novo.

(b) O crime foi cometido pelo porteiro ou pela empregada. Se foi pelo porteiro, ele não poderia ter atendido o telefone às 11:00h. Como o porteiro atendeu o telefone, quem cometeu o crime foi a empregada.

Resolução

(a) Neste argumento, podemos identificar duas proposições simples: "$p$: Vou comprar um carro" e "$q$: Vou ao Alentejo na Páscoa" . Neste contexto, o argumento pode ser traduzido por:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim q \\ q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Este argumento é válido, pois, pelo contrarrecíproco e dupla negação, temos que

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim q \\ \hline q \Rightarrow \sim p \end{array}$$

e, portanto, aplicando agora o Modus Ponens, temos:

$$\begin{array}{c} q \Rightarrow \sim p \\ q \\ \hline \sim p \end{array}.$$

(b) Neste argumento, podemos identificar três proposições simples: "$p$: O crime foi cometido pelo porteiro", "$q$: O crime foi cometido pela empregada" e "$r$: O porteiro atendeu o telefone às 11:00h. Neste contexto, o argumento pode ser traduzido por:

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline q \end{array}$$

O argumento é válido pois, pela dupla negação e Modua Tolens, temos

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow \sim r \\ r \\ \hline \sim p \end{array}$$

e pela veracidade da disjunção, temos

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ q \end{array}.$$

44. Escreva o recíproco, o contrarrecíproco e a negação das seguintes proposições:

(a) Se o tempo estiver frio choverá;

(b) Ser capaz de escrever à máquina é suficiente para aprender a processar texto;

Resolução

(a) Recíproco: Se chover, o tempo estará frio.
Contrarrecíproco: Se não chover, o tempo não estará frio.
Negação: O tempo está frio e não chove.

(b) Recíproco: Ser capaz de escrever à máquina é necessário para aprender a processar texto.
Contrarrecíproco: Não aprender a processar texto é suficiente para não ser capaz de escrever à máquina
Negação: Ser capaz de escrever à máquina e não saber processar texto.

45. Considere a afirmação

$$\text{Se } x^2 \neq 4 \text{ então } x \neq 2 \text{ e } x \neq -2$$

Demonstre a afirmação usando:

(a) o método de contrarrecíproco;

(b) o método de redução ao absurdo.

Resolução

A afirmação que queremos provar pode ser escrita como

$$x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2.$$

(a) Usar o método de contrarrecíproco implica provar que

$$\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2) \Rightarrow \sim (x^2 \neq 4),$$

ou seja, provar que

$$x = 2 \ \vee \ x = -2 \Rightarrow x^2 = 4.$$

A demonstração desta afirmação é imediata. De facto, se $x = 2$ então $x^2 = 2^2 = 4$ e se $x = -2$, então $x^2 = (-2)^2 = 4$.

(b) Usar o método de redução ao absurdo passa por supor que $x^2 \neq 4$ e que $\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2)$ e chegar a alguma contradição. Se $x^2 \neq 4$ e $x = 2 \ \vee \ x = -2$, temos que $(2)^2 \neq 4$ ou que $(-2)^2 \neq 4$. Em qualquer uma das situações temos que $4 \neq 4$, o que é claramente uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que $x^2 \neq 4$ e que $\sim (x \neq 2 \ \wedge \ x \neq -2)$. Fica assim provado que, se $x^2 \neq 4$, se tem de ter $x \neq 2$ e $x \neq -2$.

46. Apresente um contraexemplo para cada uma das seguintes afirmações.

(a) Se $n = p^2 + q^2$, com $p, q$ primos, então $n$ é primo.

(b) Se $a > b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 > b^2$.

(c) Se $a^2 > b^2$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a > b$.

(d) Se $a$ divide $bc$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$, então $a$ divide $b$ ou $a$ divide $c$.

47. Construa provas de cada uma das seguintes proposições:

(a) Para todo o natural $n$, $n^2 + n$ é par.

(b) Para todo o natural $n$, $n^2$ é par se e só se $n$ é par.

(c) Se $a, b, c$ são reais tais que $a > b$, então $ac \leq bc \Rightarrow c \leq 0$.

(d) Para quaisquer reais $a$ e $b$, se $ab = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$.

(e) Dado um número natural $n$, se $n$ é múltiplo de 6, então $n$ é múltiplo de 2 e de 3.

(f) Dados dois números racionais $p = \frac{a}{b}$ e $q = \frac{c}{d}$, com $a$ e $c$ números inteiros e $b$ e $d$ números naturais, $p < q \Leftrightarrow ad < bc$.

(g) Para todo o número real $x$, se $x^2 \geq x$ então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

(h) Para quaisquer naturais $m$ e $n$, se $mn$ é par então $m$ é par ou $n$ é par.

(i) Para todo o número real $x$ diferente de 2, existe um e um só número real $y$ tal que $\frac{2y}{y+1} = x$.

(j) Não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 5 = 3n + 2$.

(k) $1 = 0.99(9)$.

(l) $\sqrt{3}$ não é um número racional.

(m) Para quaisquer reais $x$ e $y$, se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.

(n) Para quaisquer reais $x$ e $y$, se $|x - 3| \leq 5$, então $x \geq -2$ e $x \leq 8$.

Resolução

(b) Para provar a equivalência

$$n^2 \text{ par} \Leftrightarrow n\text{par},$$

vamos provar duas implicações:

[$n$ par $\Rightarrow n^2$ par] Provamos esta implicação pelo método da prova direta: Se $n$ é par, então $n = 2k$ para algum inteiro $k$. Logo,

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2).$$

Como $2k^2$ é um inteiro, podemos concluir que $n^2$ é um número par.

[$n^2$ par $\Rightarrow n$ par] Provamos esta implicação pelo método do contrarrecíproco, provando a implicação [$n$ ímpar $\Rightarrow n^2$ ímpar]: Se $n$ é ímpar, então $n = 2k + 1$ para algum inteiro $k$. Logo,

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Como $2k^2 + 2k$ é um inteiro, podemos concluir que $n^2$ é um número ímpar.

(g) Queremos provar que

$$x^2 \geq x \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1,$$

que é uma implicação do tipo $a \to b \vee c$ (que sabemos ser logicamente equivalente a $a \wedge \sim b \Rightarrow c$). Suponhamos que $x^2 \geq x$ e que $\sim (x \leq 0)$, ou seja, suponhamos que $x^2 \geq x$ e que $x > 0$. Então, $\frac{1}{x} > 0$ e por, isso, de $x^2 \geq x$ podemos concluir que $\frac{1}{x} \times x^2 \geq \frac{1}{x} \times x$, ou seja, que $x \geq 1$, como queríamos demonstrar.

(j) Normalmente, para provar a "não existência" usamos o método de redução ao absurdo.

Suponhamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 + 5 = 3n_0 + 2$. Então, $2n_0 = 3$, e, portanto, podemos concluir que 3 é um número par, o que é uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que existe $n_0$. Logo, não existe qualquer natural que satisfaça a condição apresentada.

48. Considere o seguinte teorema:

*Seja* $x$ um número real tal que $x \neq 4$. Se $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ então $x = 7$.

(a) Indique se o argumento seguinte é uma prova do teorema dado.

*Seja* $x = 7$. *Então,* $\frac{2x-5}{x-4} = \frac{2\times 7-5}{7-4} = \frac{9}{3} = 3$. *Portanto, se* $\frac{2x-5}{x-4} = 3$ *então* $x = 7$.

(b) Apresente uma prova correta do teorema.

49. Considere a seguinte proposição falsa:

*Se* $x, y$ são números reais tais que $x + y = 10$, então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

(a) Justifique por que é que o argumento seguinte não é uma prova da proposição dada.

*Suponhamos que o consequente da proposição dada é falso. Então,* $x = 3$ e $y = 8$, *pelo que* $x + y = 3 + 8 = 11 \neq 10$. *Logo, provámos por contraposição que, se* $x + y = 10$, *então* $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

(b) Apresente um contraexemplo para a afirmação dada.

50. Paul, John e George são 3 estrelas de rock. Um toca guitarra, outro toca bateria e outro toca piano. O baterista tentou contratar o guitarrista para uma sessão de gravação, mas disseram-lhe que ele estava fora da cidade a fazer espetáculos com o pianista. O baterista admirava o trabalho de ambos os músicos. Sabendo que

(a) O pianista ganha mais que o baterista;

(b) Paul ganha menos do que John;

(c) O George nunca ouviu falar do John;

que instrumento toca cada uma das estrelas de rock?

51. Numa convenção, juntaram-se 100 políticos. Cada político ou é corrupto ou é honesto. Sabendo que:

(a) Pelo menos um dos políticos é honesto;

(b) Dados 2 quaisquer políticos pelo menos um é corrupto;

dos 100 políticos, quantos são corruptos e quantos são honestos?

52. Temos 4 cartas. Todas elas têm um número impresso num dos lados e uma letra no outro. As 4 cartas estão pousadas na mesa, estando visíveis as letras **B** e **A** e os números **8** e **5**.

Sobre estas cartas é-nos dito que **"se uma carta tem um número par de um dos lados, então, tem uma vogal no outro."**

Qual é o número mínimo de cartas que é necessário virar para verificarmos se esta regra é verdadeira?

# 2 indução natural

53. Considere as seguintes condições $p(n)$, com $n \in \mathbb{N}_0$,

(I) $p(n) = n^2 + 5n + 1$ é par; (II) $p(n) = n! \geq n^2$; (III) $p(n) = 2n > n^2$.

(a) Investigue para que naturais $n$ a proposição $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdadeira.

(b) Diga, justificando, para que naturais $n$ a proposição $p(n)$ é verdadeira.

54. Seja $P(n)$ a seguinte afirmação:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

(a) Mostre que, se $P(k)$ é verdadeira, então $P(k+1)$ também é verdadeira.

(b) Podemos concluir que $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$?

Resolução

(a) Queremos provar que se temos

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{(k-1)(k+2)}{2} \qquad (*)$$

então também temos

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{((k+1)-1)((k+1)+2)}{2},$$

ou seja, também temos

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{k(k+3)}{2}. \qquad (**)$$

De facto, se $(*)$ é verdade, temos que

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (k+1) &= 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) \\ &= (1 + 2 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \tfrac{(k-1)(k+2)}{2} + (k+1) \qquad [\text{por } (*)] \\ &= \tfrac{k^2+k-2+2k+2}{2} \\ &= \tfrac{k^2+3k}{2} = \tfrac{k(k+3)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Não. Por exemplo, se considerarmos $n = 1$, obtemos a igualdade $1 = 0$, que é obviamente falsa.

Na realidade, esta igualdade é falsa para todo $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que a soma dos $n$ primeiros naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$. Se supusermos que a igualdade dada é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, temos $n(n+1) = (n-1)(n+2)$, i.e., $n^2 + n = n^2 + n - 2$ e, portanto, $0 = -2$, o que é absurdo. O absurdo resulta de termos suposto que o tal $n$ existia. Logo, a igualdade não se verifica par todo $n \in \mathbb{N}$.

55. Prove, por indução matemática, que as seguintes igualdades são válidas para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

(a) $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$;

(b) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

(c) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$;

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

Resolução

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos:

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{6},$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $1 = 1$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Queremos provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. De facto,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+3) + 2(2n+3)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural $n$.

(e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$;

(f) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

Resolução

(1) Comecemos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos:

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3},$$

o que é verdade, pois, efetuando os cálculos, obtemos $2 = 2$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Queremos provar que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

De facto,

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+2)\\
&\quad=[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)]+(n+1)(n+2)\\
&\quad=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2) \qquad\qquad \text{(aplicando a hipótese de indução)}\\
&\quad=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}\\
&\quad=\frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que a igualdade se verifica para todo natural $n$.

(g) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-2^{k-1})=2^n-1$;

(j) $n^3-n$ é múltiplo de 3;

Resolução

(Ver escrita de resolução alternativa nos slides das aulas teóricas.) Começamos por observar que um número natural $n$ é um múltiplo de 3 se existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $n=3k$.

(1) Verificamos o caso base: considerando $n=1$, temos $1^3-1=0=3\cdot 0$, com $0\in\mathbb{N}$, pelo que a proposição " $1^3-1$ é um múltiplo de 3" é verdadeira;

(2) Suponhamos agora que $n\in\mathbb{N}$ é tal que $n^3-n=3k$, para algum $k\in\mathbb{N}$. Queremos provar que $(n+1)^3-(n+1)=3k'$, para algum $k'\in\mathbb{N}$. De facto,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3-(n+1)&=n^3+3n^2+3n+1-n-1\\
&=(n^3-n)+3n^2+3n\\
&=3k+3(n^2+n) \qquad\qquad \text{(aplicando a hipótese de indução)}\\
&=3(k+n^2+n)\\
&=3k', \qquad \text{onde } k'=k+n^2+n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que, para todo natural $n$, $n^3-n$ é um múltiplo de 3.

(k) $5^n-1$ é múltiplo de 4.

56. Prove que:

(a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{i^2})=\frac{n+1}{2n}$, para todo o natural $n\geq 2$;

(b) $n^2>2n+1$, para todo o natural $n\geq 3$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=3$, temos $3^2=9>7=2\times 3+1$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n^2 > 2n+1$. Queremos provar que $(n+1)^2 > 2(n+1)+1$, ou seja, que $(n+1)^2 > 2n+3$. De facto,

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2+2n+1 \\
&> 2n+1+2n+1 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= 2n+2n+2 \\
&> 2n+1+2 && \text{($2n$ é um natural, pelo que $2n>1$)} \\
&= 2n+3.
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que, para todo natural $n \geq 3$, $n^2 > 2n+1$.

(c) $(1+\frac{1}{n})^n < n$ para todo o natural $n \geq 3$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=3$, temos $(1+\frac{1}{3})^3 < 3$, ou seja, que $64 < 81$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $(1+\frac{1}{n})^n < n$. Queremos provar que $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} < n+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
(1+\tfrac{1}{n+1})^{n+1} &= (1+\tfrac{1}{n+1})^n(1+\tfrac{1}{n+1}) \\
&< (1+\tfrac{1}{n})^n(1+\tfrac{1}{n+1}) && \text{(porque $\tfrac{1}{n+1} < \tfrac{1}{n}$)} \\
&< n(1+\tfrac{1}{n+1}) && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= n+\tfrac{n}{n+1} \\
&< n+1 && \text{(porque $n < n+1$).}
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $(1+\frac{1}{n})^n < n$ para todo o natural $n \geq 3$.

(d) $7n < 2^n$ para todo o natural $n \geq 6$;

(e) $2^n > n^2$, para todo o natural $n \geq 5$;

(f) $2^n > n^3$, para todo o natural $n \geq 10$;

Resolução (1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n=10$, temos $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 10$ é tal que $2^n > n^3$. Queremos provar que $2^{n+1} > (n+1)^3$, ou seja, que $2^{n+1} > n^3+3n^2+3n+1$. De facto,

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2^n \times 2 \\
&> n^3 \times 2 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\
&= n^3+n^3 \\
&= n^3+n\cdot n^2 \\
&> n^3+10n^2 && \text{(porque $n>10$)} \\
&= n^3+3n^2+7n^2 \\
&> n^3+3n^2+70n && \text{(porque $n>10$)} \\
&= n^3+3n^2+3n+63n \\
&> n^3+3n^2+3n+1 && \text{(porque $63n>1$).}
\end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $2^n > n^3$, para todo o natural $n \geq 10$.

(g) $n! > 2^n$, para todo o natural $n \geq 4$.

57. Considere o real $x > -1$. Prove, por indução matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

58. Sejam $a$ e $b$ dois números reais tais que $0 \leq a \leq b$. Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, se tem

(a) $a^n \leq b^n$. (b) $ab^n + ba^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$. (c) $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$.

Resolução

(a) Vamos aplicar o método de indução natural:

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a \leq b$, o que é verdade, por hipótese;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $a^n \leq b^n$. Queremos provar que $a^{n+1} \leq b^{n+1}$. De facto, como

$$\begin{aligned} a^{n+1} &= a^n \cdot a \\ &\leq b^n \cdot a && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &\leq b^n \cdot b && \text{(porque } a \leq b \text{ e } b^n \geq 0\text{)} \\ &= b^{n+1} \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $a^n \leq b^n$, para todo o natural $n$.

(b) Este resultado prova-se sem ser necessário recorrer ao método por indução natural. De facto, temos:

$$b^{n+1} + a^{n+1} - ab^n - ba^n = b^n(b-a) - a^n(b-a) = (b^n - a^n)(b-a) \geq 0,$$

pois, por hipótese, $a \leq b$ e, pela alínea anterior, $a^n \leq b^n$. Logo,

$$b^{n+1} + a^{n+1} \geq ab^n + ba^n,$$

como queríamos demonstrar.

(c) Aplicamos novamente o método de indução natural (pois é preferível a ter de desenvolver o binómio de Newton).

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $(\frac{a+b}{2})^1 = \frac{a+b}{2} = \frac{a^1+b^1}{2}$, e, por isso, é verdade que $(\frac{a+b}{2})^1 \leq \frac{a^1+b^1}{2}$;

(2) Suponhamos agora que $n \in \mathbb{N}$ é tal que $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$. Queremos provar que $(\frac{a+b}{2})^{n+1} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}$. De facto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \frac{a+b}{2} \\ &\leq \frac{a^n+b^n}{2} \cdot \frac{a+b}{2} && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &= \frac{(a^n+b^n)(a+b)}{4} \\ &= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+a^nb+b^na}{4} \\ &\leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}+a^{n+1}+b^{n+1}}{4} && \text{(pela alínea anterior)} \\ &= \frac{2(a^{n+1}+b^{n+1})}{4} \\ &= \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{2}. \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $(\frac{a+b}{2})^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}$, para todo o natural $n$.

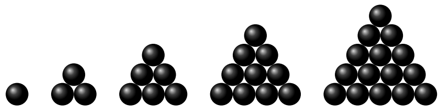
59. Descubra a lei sugerida pelos dados apresentados e prove-a por indução natural:

$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{6}$;

$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{24}$.

60. Recorrendo ao método de indução matemática, prove que a sucessão dos números triangulares



cuja definição por recorrência é $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n \qquad para\ n > 1 \end{cases}$, tem como termo geral $t_n = \frac{n^2+n}{2}$.

61. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $a_n = 3(2^n - 1)$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 3 = 3(2^1 - 1)$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que $a_n = 3(2^n - 1)$. Queremos provar que $a_{n+1} = 3(2^{n+1} - 1)$. De facto,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 3 && \text{(pela definição da sucessão)} \\ &= 2 \times 3(2^n - 1) + 3 && \text{(aplicando a hipótese de indução)} \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 6 + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} - 3 \\ &= 3(\times 2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $a_n = 3(2^n - 1)$, para todo o número natural $n$.

62. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = (n+1)a_n, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $a_n \geq 2^n$, para todo $n \geq 1$.

63. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n + 5), \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove, por indução, que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 2$ e $a_2 = \frac{1}{4}(a_1 + 5) = \frac{7}{4}$, pelo que é verdade que $1 \leq a_2 \leq a_1 \leq 2$;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$. Queremos provar que $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq 2$.

Como, por hipótese de indução, $a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, temos que $a_{n+1} \leq 2$. Falta então provar que $1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Por definição da sucessão, temos que $a_{n+2} = \frac{1}{4}(a_{n+1} + 5)$. Mas, novamente por hipótese de indução, temos que

$$\frac{1}{4}(1+5) \leq (a_{n+1} + 5) \leq \frac{1}{4}(a_n + 5),$$

ou seja, temos que

$$\frac{3}{2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Logo,

$$1 \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução, podemos concluir que $1 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 2$, para todo o número natural $n$.

64. Na matemática, os números de Fibonacci são uma sequência definida como recursiva do seguinte modo:

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & n \geq 3 \end{cases}$$

(a) Prove, através da indução matemática, que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem:

i. $F(1) + F(2) + ... + F(n) = F(n+2) - 1$;

ii. $F(2) + F(4) + ... + F(2n) = F(2n+1) - 1$;

iii. $F(3n)$ é par.

(b) Usando o Método de Indução Completa, prove que, para todo $n \geq 2$, $F(n) \geq \phi^{n-2}$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro.

[sugestão: Tenha presente que o número de ouro é o real positivo que satisfaz $x^2 = x + 1$.]

65. Use o Princípio de Indução Completa de base 2 para mostrar que todo o número natural maior ou igual a 2 se pode decompor como produto de números primos.

66. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 4 \\ a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n, \text{ para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Use o Princípio de Indução Completa para provar que $a_n = n2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Resolução

(1) Começamos por verificar o caso base: considerando $n = 1$, temos $a_1 = 1 = 1 \times 2^{1-1}$, o que é obviamente verdade;

(2) Suponhamos agora que $n \geq 1$ é tal que, para todo natural $k \leq n$, $a_k = k2^{k-1}$. Queremos provar que $a_{n+1} = (n+1)2^n$. Como na definição por recorrência da sucessão apenas a partir da terceira ordem é que os termos estão definidos à custa dos anteriores, temos de considerar duas situações:

- Se $n = 1$, temos que $a_2 = 4 = 2 \times 2^1 = 2 \times 2^{2-1}$.
- Se $n \geq 2$, temos que

  $$a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}.$$

  Neste caso, como $n \leq n$ e $n - 1 \leq n$, podemos aplicar a hipótese de indução completa aos termos $a_n$ e $a_{n-1}$ e, assim, temos que

  $$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4n2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2} \\ &= 4n2^{n-1} - 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= 8n2^{n-2} - 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= 4n2^{n-2} + 4 \times 2^{n-2} \\ &= (n+1)2^n. \end{aligned}$$

Por (1) e (2), aplicando o Princípio de Indução Completa, podemos concluir que $a_n = n2^{n-1}$, para todo o número natural $n$.

67. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 3 \\ a_n = a_{n-2} + 2a_{n-1}, \ \text{para todo } n \geq 3 \end{cases}$$

Use o Princípio de Indução Completa para provar que $a_n$ é um número ímpar, para todo $n \geq 1$.

68. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 + a_0 + 1, \ \text{para todo } n \geq 1 \end{cases}$$

Mostre que $a_n = 2^n$, para todo $n \geq 0$.

69. Considere a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \ \text{para todo } n \geq 3 \end{cases}$$

Mostre que $a_n = 3 \times 2^{n-1} + 2 \times (-1)^n$, para todo $n \geq 1$.

70. Pretende-se dividir uma barra de chocolate nos $n$ quadrados que a compõem. Sabendo que apenas se pode partir a barra pelas linhas que definem os quadrados, mostre que é necessário partir o chocolate $n - 1$ vezes para se separar os $n$ quadrados.

## 3 conjuntos

71. Considere o conjunto $A = \{1, -1, \frac{1}{4}, 2, 0, -\frac{1}{2}\}$. Indique os elementos de cada um dos conjuntos seguintes.

    (a) $\{a \in A : a^2 \in \mathbb{Z}\}$;
    (b) $\{a \in A : \sqrt{a} \in \mathbb{R}\}$;
    (c) $\{a^2 \in \mathbb{R} : a \in A \wedge a^2 \in A\}$;
    (d) $\{\sqrt{a} \in \mathbb{R} : a \in A \wedge a^2 \in A\}$;
    (e) $\{b \in \mathbb{Z} : \exists a \in A\ b = a^2\}$;
    (f) $\{b \in \mathbb{R} : \exists a \in A\ b^2 = a\}$.

72. Descreva em compreensão cada um dos seguintes conjuntos:

    (a) $\{-1, 1\}$;
    (b) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
    (c) $\{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$;
    (d) $\{4, 9, 16, 25, \ldots\}$.

73. Justifique que os seguintes conjuntos são iguais:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}; \qquad B = \{1, 2\}; \qquad C = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid 0 < n^2 \leq 4\}.$$

74. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos tais que $A$ é um subconjunto de $B$ e $B$ é um subconjunto de $C$. Suponha ainda que $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Quais das afirmações seguintes são necessariamente verdadeiras?

    (a) $a \in C$; (b) $b \in A$; (c) $c \notin A$; (d) $d \in B$; (e) $e \notin A$; (f) $f \notin A$.

    Resolução

    As afirmações necessariamente verdadeiras são as afirmações (a), (e) e (f).

    Justificações:

    (a) Como $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, temos que $A \subseteq C$. Assim, qualquer elemento de $A$ é também elemento de $C$. Como $a \in A$, podemos concluir que $a \in C$.
    (e) Como $A \subseteq B$, qualquer elemento de $A$ é também elemento de $B$. Assim, pelo contrarrecíproco, se um dado objeto não é elemento de $B$, então também não é elemento de $A$. Como $e \notin B$, podemos concluir que $e \notin A$.
    (f) A justificação é análoga à justificação de (e), mas considerando que $A \subseteq C$ e que $f \notin C$.

    Para as restantes afirmações, há exemplos onde são verdadeiras e há exemplos onde são falsas, pelo que afirmamos que, no geral, não são verdadeiras. Como justificação apresentamos contraexemplos:

    (b) Se considerarmos $A = \{a\}$, $B = \{a, b\}$ e $C = \{a, b, c\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $b \notin A$.
    (c) Se considerarmos $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{a, b, c, d, e\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $c \in A$.
    (d) Se considerarmos $A = \{a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{a, b, c, d, e\}$, temos que $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. No entanto, $d \notin B$.

75. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

    (a) $1 \in \{1\}$;
    (b) $1 \in \{\{1\}\}$;
    (c) $\{1\} \in \{1\}$;
    (d) $\{1\} \in \{\{1\}\}$;
    (e) $\{1\} \subseteq \{1\}$;
    (f) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$;
    (g) $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$;
    (h) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{\{1\}\}$;
    (i) $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$.

Resolução

(a) Verdadeira. O número 1 é o único elemento do conjunto $\{1\}$, pelo que podemos afirmar que $1 \in \{1\}$;

(b) Falsa. O único elemento que o conjunto à direita do símbolo $\in$ tem é o elemento $\{1\}$. Assim, 1 não é elemento do conjunto. Logo, temos que $1 \notin \{\{1\}\}$;

(c) Falsa. O único elemento que o conjunto à direita do símbolo $\in$ tem é o elemento 1. Assim, $\{1\}$ não é elemento do conjunto. Logo, temos que $\{1\} \notin \{1\}$;

(d) Verdadeira. O conjunto $\{1\}$ é o único elemento do conjunto $\{\{1\}\}$, pelo que podemos afirmar que $\{1\} \in \{\{1\}\}$;

(e) Verdadeira. Qualquer conjunto é subconjunto dele próprio. Por isso, podemos afirmar que $\{1\} \subseteq \{1\}$;

(f) Falsa. O único elemento do conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$, o elemento 1, não é elemento do conjunto à direita do mesmo símbolo, uma vez que o único elemento desse conjunto é $\{1\}$. Logo, temos que o primeiro conjunto não é subconjunto do segundo conjunto;

(g) Verdadeira. O conjunto à direita do símbolo $\in$ tem dois elementos: o elemento 1 e o elemento $\{1\}$. Assim, por causa deste último, podemos afirmar que $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$;

(h) Falsa. O conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$ tem dois elementos e o conjunto à direita tem um elemento. logo, o primeiro conjunto nunca pode ser subconjunto do segundo;

(i) Verdadeira. O conjunto à esquerda do símbolo $\subseteq$ tem um único elemento, o elemento 1. O conjunto à direita do símbolo $\in$ tem dois elementos: o elemento 1 e o elemento $\{1\}$. Assim, todos os elementos do primeiro conjunto são elementos do segundo conjunto e, por isso, o primeiro conjunto é subconjunto do segundo conjunto. Logo, temos que $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$.

76. Investigue a veracidade de cada uma das seguintes proposições.

    (a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$, (b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$; (c) $\emptyset \notin \emptyset$; (d) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$.

77. Mostre que os conjuntos $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ são distintos dois a dois.

78. Dê exemplos de conjuntos $A$ e $B$ tais que se tenha simultaneamente

    (a) $A \in B$ e $A \subseteq B$; (b) $A \in B$ e $A \not\subseteq B$; (c) $A \notin B$ e $A \subseteq B$.

79. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Diga, justificando, se cada uma das afirmações que se seguem é ou não verdadeira.

    (a) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;
    (b) Se $A \in B$ e $B \in C$, então $A \in C$;
    (c) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então $A \in C$;
    (d) Se $A \in B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$;
    (e) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$, então $A \in C$;
    (f) Se $A \subseteq B$ e $B \in C$, então $A \subseteq C$.

80. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Simbolize convenientemente:

    (a) $A$ e $B$ têm um elemento em comum;
    (b) Nenhum elemento de $A$ é elemento de $B$;
    (c) $A$ tem um único elemento;
    (d) $A$ tem exatamente dois elementos.

Resolução

(a) Dizer que "$A$ e $B$ têm um elemento em comum" é o mesmo que dizer que

$$A \cap B \neq \emptyset$$

ou que

$$(\exists x)\ x \in A \wedge x \in B.$$

(b) Dizer que "Nenhum elemento de $A$ é elemento de $B$" é o mesmo que dizer que

$$A \cap B = \emptyset$$

ou que

$$(\forall x \in A)\ x \notin B.$$

(c) Dizer que "$A$ tem um único elemento" é o mesmo que dizer que

$$(\exists^1 x)\ x \in A$$

ou que

$$(\exists x)\ x \in A \wedge [(\exists y :\ y \in A) \Rightarrow x = y]\,.$$

(d) Dizer que "$A$ tem exatamente dois elementos" é o mesmo que dizer que

$$(\exists x, y \in A)\ x \neq y \wedge [(\exists z : z \in A) \Rightarrow z = x \vee z = y]\,.$$

81. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Identifique os seguintes conjuntos:

(a) $A \cap B$; (b) $A \cup B$; (c) $A \setminus B$; (d) $(A \setminus B) \cap B$; (e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$; (f) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

82. Seja $X = \{x \in \mathbb{R} : -11 < x < 11\}$. Considere os seguintes subconjuntos de $X$:

$$A = \{x \in X : 0 < x < 3\}, \quad B = \{x \in X : 2 < x < 6\} \ \text{ e } \ C = \{x \in X : -1 < x < 1\}.$$

Determine:

(a) $A \cup B$; (b) $A \cap B$; (c) $A'$; (d) $B \setminus A$; (e) $B'$; (f) $A \cap (B \cup C)$; (g) $(A \cap B) \cup (A \cup C)$; (h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

83. Sejam $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : (\exists y \in \mathbb{N}) x = 2y\}$ e $C = \{x^2 :\ x \in A\}$. Determine

(a) $A \cup C$; (b) $A \cup A$; (c) $A \cup B$; (d) $A \cap B$; (e) $B \cup C$; (f) $B \cap B$; (g) $A \backslash B$; (h) $C \backslash A$; (i) $B \backslash B$.

Resolução

Começamos por observar que $B$ é o conjunto de todos os números pares e que $C = \{2^2, 4^2, 6^2, 8^2\} = \{4, 16, 36, 64\}$, pelo que tanto $A$ como $C$ são subconjuntos de $B$. Estamos agora em condições de determinar cada um dos conjuntos pedidos.

(a) $A \cup C = \{x : x \in A \vee x \in C\} = \{2, 4, 6, 8, 16, 36, 64\}$;

(b) $A \cup A = \{x : x \in A \vee x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$;

(c) $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = B$, uma vez que $A \subseteq B$;

(d) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} = A$, uma vez que $A \subseteq B$;

(e) $B \cup C = \{x : x \in B \vee x \in C\} = B$, uma vez que $C \subseteq B$;

(f) $B \cap B = \{x : x \in B \wedge x \in B\} = B$;

(g) $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \emptyset$;

(h) $C \backslash A = \{x : x \in C \wedge x \notin A\} = \{16, 36, 64\}$;

(i) $B \backslash B = \{x; x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset$, pois a condição que define o conjunto $(x \in B \wedge x \notin B)$ é uma condição impossível.

84. Sejam $A$ e $B$ conjuntos.

(a) Mostre que $(A \cup B) \setminus B \subseteq A$;

(b) Dê exemplo de dois conjuntos $A$ e $B$ tais que $(A \cup B) \setminus B \neq A$;

(c) Mostre que $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

85. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) Se $C \subseteq A \cup B$, então $C \subseteq A$ e $C \subseteq B$;

(b) Se $C \subseteq A$ ou $C \subseteq B$, então $C \subseteq A \cup B$;

(c) Se $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$;

(d) Se $A \cup B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$;

(e) Se $A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$, então $A \cup B \subseteq C$.

Resolução

(a) Falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{2, 3\}$, temos que $C \subseteq A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ e, no entanto, $C \nsubseteq A$ e $C \nsubseteq B$;

(b) Verdadeira. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos, pela transitividade da inclusão de conjuntos, que:

$$C \subseteq A \text{ e } A \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \cup B$$

e

$$C \subseteq B \text{ e } B \subseteq A \cup B \Rightarrow C \subseteq A \cup B;$$

(c) Verdadeira. Sabemos que $A \cup B$ é o menor conjunto que contém simultaneamente $A$ e $B$. Logo, Se $C$ é tal que $A \subseteq C$ e $B \subseteq C$ temos que $A \cup B \subseteq C$.

(d) Verdadeira. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, temos, pela transitividade da inclusão de conjuntos, que:

$$A \subseteq A \cup B \text{ e } A \cup B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

e

$$B \subseteq A \cup B \text{ e } A \cup B \subseteq C \Rightarrow B \subseteq C;$$

(e) Falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ e $C = \{3, 4, 5\}$, temos que $B \subseteq C$, pelo que se verifica que "$A \subseteq C$ ou $B \subseteq C$" e $A \cup B \notin C$.

86. Sejam $X$ um conjunto e $A, B, C \subseteq X$ tais que $A \cap B = A \cap C$ e $(X \setminus A) \cap B = (X \setminus A) \cap C$. Mostre que $B = C$.

87. Usando as propriedades das operações entre conjuntos, determine:

(a) $(\emptyset \cup A) \cap (B \cup A)$; (b) $(A \cup B) \cap (A \cup B')$; (c) $A \cap (A \cup B)$.

88. Dê exemplos de conjuntos $A, B, C$, para os quais se tenha, respetivamente:

(a) $A \cup (B \backslash C) \neq (A \cup B) \backslash (A \cup C)$;

(b) $A \backslash (B \cup C) \neq (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$;

(c) $A \backslash (B \cap C) \neq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Resolução

(a) Sejam $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Então,

$$A \cup (B \backslash C) = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad (A \cup B) \backslash (A \cup C) = \{1, 2, 3\} \backslash \{2, 3, 4\} = \{1\}.$$

(b) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{3, 5, 6\}$. Então,

$$A \backslash (B \cup C) = \{1\} \quad \text{e} \quad (A \backslash B) \cup (A \backslash C) = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}.$$

(c) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{3, 5, 6\}$. Então,

$$A \backslash (B \cap C) = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad (A \backslash B) \cap (A \backslash C) = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}.$$

89. Para cada um dos conjuntos seguintes, escreva (usando símbolos lógicos) o que significa um objeto $x$ ser um elemento desse conjunto. Depois, determine os conjuntos que são iguais entre si, determinando as proposições que são logicamente equivalentes.

(a) $(A \setminus B) \setminus C$;

(b) $A \setminus (B \setminus C)$;

(c) $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

(d) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

(e) $A \setminus (B \cup C)$.

90. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Prove que

(a) se $A \cup B = \emptyset$, então $A = \emptyset$ e $B = \emptyset$;

(b) $A \backslash B \subseteq A$;

(c) $A \backslash \emptyset = A$;

(d) $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$;

(e) $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$;

(f) $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$;

(g) se $A \subseteq B$, então $A \cup (B \backslash A) = B$.

Resolução

(a) Sabendo que $A \cup B = \emptyset$, queremos provar que $A = \emptyset$ e que $B = \emptyset$. Como $A \subseteq A \cup B$ e $B \subseteq A \cup B$, podemos concluir que $A \subseteq \emptyset$ e que $B \subseteq \emptyset$. Como o único subconjunto do vazio é o próprio vazio, temos que $A = \emptyset$ e que $B = \emptyset$.

(b) Como

$$x \in A \backslash B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A,$$

temos que $A \backslash B \subseteq A$.

(c) Como

$$x \in A \backslash \emptyset \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin \emptyset \Leftrightarrow x \in A,$$

uma vez que "$x \notin \emptyset$" é uma condição universal e qualquer condição universal é elemento neutro da conjunção de condições, temos que $A \backslash \emptyset = A$.

(d) Como

$$x \in (A \backslash B) \cap B \Leftrightarrow x \in A \backslash B \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \text{ e } x \in B \Leftrightarrow x \in \emptyset,$$

uma vez que a condição "$x \notin B$ e $x \in B$" é uma condição impossível e uma condição impossível é elemento absorvente para a conjunção e define o conjunto vazio, temos que $(A \backslash B) \cap B = \emptyset$.

(e) Como

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \backslash C) & \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \backslash C \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B \text{ e } x \notin C \\ & \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ e } x \notin C \\ & \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \backslash C, \end{aligned}$$

temos que $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash C$.

(f) Como

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup A \backslash B & \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \backslash B \\ & \Leftrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } x \notin B) \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ e } (x \in B \text{ ou } x \notin B) \\ & \Leftrightarrow x \in A, \end{aligned}$$

uma vez que a condição "$x \notin B$ ou $x \in B$" é uma condição universal e uma condição universal é elemento neutro para a conjunção, temos que $A = (A \cap B) \cup (A \backslash B)$.

(g) Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $A \cup (B \backslash A) = B$. De facto, sabemos que $B = A \cup B$ e, por isso,

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \backslash A) & \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \backslash A \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \notin A) \\ & \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \notin A) \\ & \Leftrightarrow x \in A \cup B \\ & \Leftrightarrow x \in B. \end{aligned}$$

Assim, estamos em condições de concluir que $A \cup (B \backslash A) = B$.

91. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Mostre que se $A \cup B = A \cup C$ e $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$.

Resolução

Sabendo que $A \cup B = A \cup C$ e que $A \cap B = A \cap C$, queremos provar que $B = C$.

Como $B \subseteq A \cup B$ temos que $B = B \cap (A \cup B)$. Analogamente, como $C \subseteq A \cup C$, podemos concluir que $C = C \cap (A \cup C)$. Assim,

$$\begin{aligned} B & = B \cap (A \cup B) & & \\ & = B \cap (A \cup C) & & \text{(por hipótese)} \\ & = (B \cap A) \cup (B \cap C) & & \text{(por distributividade de } \cap \text{ em relação a } \cup) \\ & = (C \cap A) \cup (C \cap B) & & \text{(por hipótese e por comutatividade de } \cap) \\ & = C \cap (A \cup B) & & \text{(por distributividade de } \cap \text{ em relação a } \cup) \\ & = C \cap (A \cup C) & & \text{(por hipótese)} \\ & = C. & & \end{aligned}$$

92. Seja $E$ o conjunto $\{1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$. Determine:

(a) $\mathcal{P}(E)$; (b) $E \cap \mathcal{P}(E)$.

Resolução

(a) O conjunto $E$ tem quatro elementos, pelo que a sua potência é um conjunto com dezasseis elementos, que são os dezasseis subconjuntos de $E$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) &= \{\emptyset, \{1\}, \{\{1\}\}, \{2\}, \{\{1,2\}\}, \{1,\{1\}\}, \{1,2\}, \{1,\{1,2\}\}, \{\{1\},2\}, \{\{1\}.\{1,2\}\},\\ &\quad \{2,\{1,2\}\}, \{1,\{1\},2\}, \{1,\{1\},\{1,2\}\}, \{1,2,\{1,2\}\}, \{\{1\},2,\{1,2\}\}, E\}.\end{aligned}$$

(b) $E \cap \mathcal{P}(E) = \{\{1\}, \{1,2\}\}$.

93. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{\emptyset, \{1,2,3\}\}$.
    (a) Indique $\mathcal{P}(A)$.
    (b) Diga, justificando, se:
    (i) $A \in \mathcal{P}(B)$; (ii) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; (iii) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

94. Determine todos os elementos de:
    (a) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$;
    (b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{\emptyset\}))$.

95. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Mostre que $A \subseteq B$ se e só se $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

    Resolução

    Vamos provar esta equivalência provando uma dupla implicação.

    [$\Rightarrow$] Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

    Se $A \subseteq B$, sabemos que qualquer subconjunto de $A$ é também subconjunto de $B$. Assim, qualquer elemento de $\mathcal{P}(A)$ é elemento de $\mathcal{P}(B)$. Logo, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

    [$\Leftarrow$] Sabendo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, queremos provar que $A \subseteq B$.

    Da hipótese temos que qualquer subconjunto de $A$ é um subconjunto de $B$. Mas, $A$ é subconjunto de si próprio. Então, $A$ é subconjunto de $B$, o que prova o pretendido.

96. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:
    (a) $\{\emptyset\} \subseteq A$, para qualquer conjunto $A$;
    (b) $\emptyset \subseteq A$, para qualquer conjunto $A$;
    (c) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto $A$;
    (d) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto $A$;
    (e) $\emptyset \in A$, para qualquer conjunto $A$;
    (f) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, para qualquer conjunto $A$;
    (g) $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\emptyset)$;
    (h) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$;
    (i) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

97. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:
    (a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
    (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
    (c) Se $(A \cup B) \in \mathcal{P}(A \cap B)$ então $A = B$.

    Resolução

    (a) A afirmação é verdadeira. De facto, temos

    $$X \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B \Leftrightarrow X \subseteq A \text{ e } X \subseteq B$$

    $$\Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \text{ e } X \in \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

(b) A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: se $A = \{1\}$ e $B = \{2,3\}$, então $A \cup B = \{1,2,3\}$ e, por isso, $\{1,2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ e $\{1,2\} \notin \mathcal{P}(A)$ e $\{1,2\} \notin \mathcal{P}(B)$. Assim, os dois conjuntos não são necessariamente iguais.

(c) A afirmação é verdadeira. Se $(A \cup B) \in \mathcal{P}(A \cap B)$, então $A \cup B \subseteq A \cap B$ e como, em geral, $A \cap B \subseteq A \cup B$, temos que $A \cup B = A \cap B$. Como a união de dois conjuntos é o menor conjunto que os contém e a interseção de conjunto é o maior conjunto neles contido, concluímos que $A \cap B = A = B = A \cup B$.

98. Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Dados $a \in A$ e $b \in B$, definimos o *par ordenado* $(a,b)$ como sendo o conjunto $\{\{a\}, \{a,b\}\}$. Prove que, para quaisquer $a, x \in A$ e quaisquer $b, y \in B$, se tem $(a,b) = (x,y)$ se e só se $a = x$ e $b = y$.

99. Considere os conjuntos $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{e,f\}$ e $C = \{g\}$.

(a) Determine:

| | | |
|---|---|---|
| (i) $B \times C$ e $C \times B$; | (iii) $A \times B \times C$; | (v) $B^3$; |
| (ii) $(B \times C) \setminus (C \times B)$; | (iv) $A \times \emptyset \times C$; | (vi) $B^3 \times C$. |

(b) Verifique que os conjuntos $B^3 \times C$ e $C \times B^3$ não são iguais.

(c) Indique o número de elementos dos conjuntos $A^3 \times B \times C$ e $C^3 \times B \times A^4$.

100. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Prove que:

(a) se $A \subseteq B$, então $A \times C \subseteq B \times C$;

(b) se $A \subseteq B$, então $C \times A \subseteq C \times B$;

(c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

(d) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(e) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$.

Resolução

(a) Sabendo que $A \subseteq B$, queremos provar que $A \times C \subseteq B \times C$. De facto, temos que

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times C \quad &\Leftrightarrow x \in A \text{ e } y \in C && \text{(por definição de prod. cartesiano)}\\
&\Rightarrow x \in B \text{ e } y \in C && \text{(por hipótese)}\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in B \times C. && \text{(por definição de prod. cartesiano)}
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $A \times C \subseteq B \times C$.

(b) Análogo ao anterior.

(c) Temos que

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C \quad &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ e } y \in C && \text{(def. de prod. cartes.)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } y \in C && \text{(definição de } \cup)\\
&\Leftrightarrow (x \in A \text{ e } y \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ e } y \in C) && \text{(dist. de } \wedge \text{ em relação a} \vee)\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \text{ ou } (x,y) \in B \times C && \text{(def. de prod. cartesiano)}\\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times C \cup B \times C && \text{(definição de } \cup)
\end{aligned}$$

101. Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos. Prove que $(A \times A) \backslash (B \times B) = [(A \backslash B) \times A] \cup [A \times (A \backslash B)]$.

102. Sejam $A$ e $B$ conjuntos tais que $A \neq B$. Suponha que $C$ é um conjunto tal que $A \times C = B \times C$. Mostre que $C = \emptyset$.

Resolução

Demonstração por redução ao absurdo.

Suponhamos que $A$, $B$ e $C$ são conjuntos tais que $A \neq B$, $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$. Então,

- de $A \neq B$ sabemos que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$ ou que existe $b \in B$ tal que $b \notin A$ (uma das afirmações desta disjunção pode ser falsa, pois um (e apenas um) dos conjuntos $A$ e $B$ pode ser o conjunto vazio). Suponhamos, sem perdas de generalidade, que existe $a \in A$ tal que $a \notin B$.
- de $C \neq \emptyset$ podemos concluir que existe $c \in C$.

Assim, estamos em condições de concluir que existe o elemento $(a, c) \in A \times C$. Mas, $A \times C = B \times C$, pelo que $(a, c) \in B \times C$ e, por isso, temos que $a \in B$. Logo, temos $a \notin B$ e $a \in B$, uma contradição. A contradição resulta de termos suposto que os três conjuntos são tais que $A \neq B$, $A \times C = B \times C$ e $C \neq \emptyset$. Logo, se os três conjuntos são tais que $A \neq B$ e $A \times C = B \times C$, temos que ter $C = \emptyset$.

103. Seja $A$ um conjunto finito. Qual dos conjuntos $\mathcal{P}(A \times A)$ e $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ tem mais elementos?

104. Considere o conjunto de índices $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Calcule a união e a intersecção das seguintes famílias de conjuntos:

(a) $\{A_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $A_k = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2k\}$;

(b) $\{B_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $B_k = [-k/2, k+2[$;

(c) $\{C_k\}_{k \in I}$ em que, para cada $k \in I$, $C_k = \left[-\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right]$.

105. Calcule a união e a intersecção das seguintes famílias de conjuntos:

(a) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{z \in \mathbb{Z} : \ |z| \leq 2n\}$;

(b) $\{B_x\}_{x \in \mathbb{R}_0^+}$ em que, para cada $x \in \mathbb{R}_0^+$, $B_x = [-x/2, x+2[$;

(c) $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ em que, para cada $i \in \mathbb{N}_0$, $C_i = [-\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}]$.

106. Dê exemplo de uma família de conjuntos todos diferentes entre si, indexada pelo conjunto $\mathbb{N}$, tal que

(a) a união dos conjuntos da família é igual a $\mathbb{Z}$ e a intersecção é igual a $\{0\}$;

(b) a união dos conjuntos da família é igual a $\mathbb{R}_0^+$ e a intersecção é o conjunto vazio;

(c) a união dos conjuntos da família é igual a $[2, 8]$ e a intersecção é igual a $[3, 6]$.

Resolução

(a) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja, por exemplo, $A_i = \{-i, 0, i\}$. Então, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{Z}$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \{0\}$.

(b) Sejam, por exemplo, $A_1 = \{0\}$ e $A_i = ]0, i[$, para $i \geq 2$. Então, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}_0^+$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset$.

(c) Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja, por exemplo, $A_i = [2 + \frac{1}{i}, 8 - \frac{2}{i}]$. Então, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [2, 8]$ e $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = [3, 6]$.

# 4 relações binárias

107. Para os conjuntos $A$ e $B$ e relação $R$ de $A$ em $B$, indique o domínio, o contradomínio de $R$ e o conjunto imagem de $X$ por $R$:

   (a) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;
   $R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 5), (3, 7)\}$;
   $X = \{2, 3\}$;

   (b) $A = B = \mathbb{N}$;
   $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m = 2n\}$;
   $X = 4\mathbb{N}$;

   (c) $A = B = \mathbb{R}$;
   $R$ é relação binária em $\mathbb{R}$ definida por $x\,R\,y \;\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$;
   $X = \{-2, -1, 1, 2\}$;

   (d) $A = B = \{x : x$ é um triângulo no plano$\}$;
   $R = \{(x, y) \in A \times A \mid$ os triângulos $x$ e $y$ são semelhantes$\}$;
   $X$ é o conjunto formado por um triângulo equilátero cujo lado mede 3cm;

   (e) $A$ é o conjunto de todas as pessoas e $B$ é o conjunto de todos os livros;
   $R = \{(a, b) \in A \times B \mid a$ leu $b\}$;
   $X = \{a \in A : a$ é recém-nascido$\}$.

108. Para cada uma das relações binárias definidas em $\mathbb{Z}$, determine a imagem e a imagem completa inversa de $\{3\}$:

   (a) $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a = |b|\}$;

   (b) $S = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a$ é divisor de $b\}$;

   (c) $T = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (\exists k \in \mathbb{Z}) b = 4k + a\}$;

   (d) $U = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a + b = 7\}$.

109. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$ e as relações $R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$ e $S = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 6)\}$ definidas de $A$ para $B$ e de $B$ para $B$, respetivamente. Determine:

   (a) $S \circ S$;
   (b) $S \circ R$;
   (c) $R \circ S$;
   (d) $S^{-1}$;
   (e) $R^{-1}$;
   (f) $R^{-1} \circ S$;
   (g) $S^{-1} \circ R$;
   (h) $(S^{-1} \circ R)^{-1}$.

   Resolução

   (a) $S \circ S = \{(x, y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x, z) \in S$ e $(z, y) \in S\} = \{(4, 4), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$. De facto,

   - porque $(4, 5), (5, 4) \in S$, temos que $(4, 4) \in S \circ S$;
   - porque $(4, 6), (6, 6) \in S$, temos que $(4, 6) \in S \circ S$;
   - porque $(5, 4), (4, 5) \in S$, temos que $(5, 5) \in S \circ S$;
   - porque $(5, 4), (4, 6) \in S$, temos que $(5, 6) \in S \circ S$;
   - porque $(6, 6), (6, 6) \in S$, temos que $(6, 6) \in S \circ S$.

(b) $S \circ R = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R$ e $(z,y) \in S\} = \{(1,5),(1,6),(1,4),(2,4),(3,6)\}$. De facto,

- porque $(1,4) \in R$ e $(4,5) \in S$, temos que $(1,5) \in S \circ R$;
- porque $(1,4) \in R$ e $(4,6) \in S$, temos que $(1,6) \in S \circ R$;
- porque $(1,5) \in R$ e $(5,4) \in S$, temos que $(1,4) \in S \circ R$;
- porque $(2,5) \in R$ e $(5,4) \in S$, temos que $(2,4) \in S \circ R$;
- porque $(3,6) \in R$ e $(6,6) \in S$, temos que $(3,6) \in S \circ R$.

(c) $R \circ S = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S$ e $(z,y) \in R\} = \emptyset$, uma vez que $D'_S \cap D_R = \emptyset$.

(d) $S^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in S\} = \{(5,4),(6,4),(4,5),(6,6)\}$

(e) $R^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in R\} = \{(4,1),(5,1),(5,2),(6,3)\}$

(f) $R^{-1} \circ S = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S$ e $(z,y) \in R^{-1}\} = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in S$ e $(y,z) \in R\} = \{(5,1),(4,1),(4,2),(6,3),(4,3)\}$. De facto,

- $(5,1) \in R^{-1} \circ S$ porque $(5,4) \in S$ e $(1,4) \in R$;
- $(4,1) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,5) \in S$ e $(1,5) \in R$;
- $(4,2) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,5) \in S$ e $(2,5) \in R$;
- $(6,3) \in R^{-1} \circ S$ porque $(6,6) \in S$ e $(3,6) \in R$;
- $(4,3) \in R^{-1} \circ S$ porque $(4,6) \in S$ e $(3,6) \in R$.

(g) $S^{-1} \circ R = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R$ e $(z,y) \in S^{-1}\} = \{(x,y) \in A \times A : (\exists z \in A)(x,z) \in R$ e $(y,z) \in S\} = \{(1,5),(1,4),(2,4),(3,6),(3,4)\}$. De facto,

- $(1,5) \in S^{-1} \circ R$ porque $(1,4) \in R$ e $(5,4) \in S$;
- $(4,1) \in S^{-1} \circ R$ porque $(1,5) \in R$ e $(4,5) \in S$;
- $(4,2) \in S^{-1} \circ R$ porque $(2,5) \in R$ e $(4,5) \in S$;
- $(6,3) \in S^{-1} \circ R$ porque $(3,6) \in R$ e $(6,6) \in S$;
- $(3,4) \in R^{-1} \circ S$ porque $(3,6) \in R$ e $(4,6) \in S$.

ou, tendo em conta a alínea anterior,

$S^{-1} \circ R = (R^{-1} \circ S)^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in R^{-1} \circ S\} = \{(1,5),(1,4),(2,4),(3,6),(3,4)\}$.

(h) $(S^{-1} \circ R)^{-1} = \{(x,y) \in A \times A : (y,x) \in S^{-1} \circ R\} = \{(5,1),(4,1),(4,2),(6,3),(4,3)\}$.

110. Considere o conjunto $A = \{2,4,6,8,10\}$ e as relações

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(10,8)\}, \qquad S = \{(10,2),(10,8)\}, \qquad T = \{(6,2),(6,4),(8,10)\}$$

nele definidas. Determine:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $R^{-1}$; | (c) $T \setminus S^{-1}$; | (e) $S \circ T$; | (g) $S^{-1} \circ T^{-1}$; |
| (b) $R^{-1} \cup S^{-1}$; | (d) $T^{-1} \cap S$; | (f) $R \circ T$; | (h) $S^{-1} \circ S$. |

111. Sejam $E = \{(p,q) \in P \times P :$ a pessoa $p$ é inimiga da pessoa $q\}$ e $F = \{(p,q) \in P \times P :$ a pessoa $p$ é amiga da pessoa $q\}$, onde $P$ é o conjunto de todas as pessoas. Que significado tem o ditado "Inimigo de um meu inimigo meu amigo é" em termos das relações $E$ e $F$?

Resolução

Se me identificar com $x$, identificar o meu inimigo por $y$ e o inimigo do meu inimigo por $z$, nas condições do enunciado, podemos traduzir a expressão "inimigo do meu inimigo"por

$$(z,y),(y,x) \in E.$$

A condição $(z, x) \in F$ traduz que o primeiro $(z)$ é meu amigo. Assim, o provérbio pode ser traduzido pela implicação

$$(z, y) \in E \text{ e } (y, x) \in E \Rightarrow (z, x) \in F,$$

ou seja,

$$(z, x) \in E \circ E \Rightarrow (z, x) \in F,$$

o que pode ser traduzido em termos das relações binárias $E$ e $F$ por

$$E \circ E \subseteq F.$$

112. Seja $A$ um conjunto de pessoas. Definam-se em $A$ as relações binárias:

$a\,R\,b \Leftrightarrow$ "$b$ é progenitor de $a$"; $a\,S\,b \Leftrightarrow$ "$b$ é irmão de $a$"; $a\,T\,b \Leftrightarrow$ "$b$ é cônjuge de $a$".

Qual o grau de parentesco entre $a$ e $b$ se:

(a) $a\ R \circ S\ b$;

(b) $a\ T \circ R\ b$;

(c) $a\ T \circ S\ b$;

(d) $a\ S \circ R\ b$;

(e) $a\ R \circ T\ b$;

(f) $a\ R \circ T \circ S\ b$.

Resolução

(a) Como

$$\begin{aligned} a\ R \circ S\ b &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ a\ S\ c \text{ e } c\ R\ b \\ &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ c \text{ é irmão de } a \text{ e } b \text{ é progenitor de } c \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$a\ R \circ S\ b \text{ se e só se } b \text{ é progenitor de } a.$$

(e) Como

$$\begin{aligned} a\ R \circ T\ b &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ a\ T\ c \text{ e } c\ R\ b \\ &\Leftrightarrow (\exists c \in A)\ c \text{ é cônjuge de } a \text{ e } b \text{ é progenitor de } c \end{aligned}$$

podemos concluir que

$$a\ T \circ R\ b \text{ se e só se } b \text{ é sogro de } a.$$

113. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 4)\}.$$

Encontre: $R^2$ (ou seja $R \circ R$ ), $R^3$ (ou seja $R^2 \circ R$), $R^4$ e $R^5$.

114. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos, $R$ e $S$ relações binárias de $A$ em $B$ e $T$ e $U$ relações binárias de $B$ em $C$. Mostre que:

(a) $R \circ \text{id}_A = R$;

(b) $\text{id}_B \circ R = R$;

(c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

(d) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;

(e) $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$;

(f) $T \subseteq U \Rightarrow T \circ R \subseteq U \circ R$;

(g) $(T \cup U) \circ R = (T \circ R) \cup (U \circ R)$;

(h) $T \circ (R \cup S) = (T \circ R) \cup (T \circ S)$;

(i) $(T \cap U) \circ R \subseteq (T \circ R) \cap (U \circ R)$;

(j) $T \circ (R \cap S) \subseteq (T \circ R) \cap (T \circ S)$.

Resolução (b) Como

$$\begin{aligned}(x,y)\in \mathrm{id}_B\circ R &\Leftrightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in \mathrm{id}_B\\ &\Leftrightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } z=y\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in R,\end{aligned}$$

temos que $\mathrm{id}_B\circ R=R$.

(d) Como

$$\begin{aligned}(x,y)\in (R\cap S)^{-1} &\Leftrightarrow (y,x)\in R\cap S\\ &\Leftrightarrow (y,x)\in R \text{ e } (y,x)\in S\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in R^{-1} \text{ e } (x,y)\in S^{-1}\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in R^{-1}\cap S^{-1},\end{aligned}$$

temos que $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

(f) Sabendo que $T\subseteq U$, queremos provar que $T\circ R\subseteq U\circ R$. Como

$$\begin{aligned}(x,y)\in T\circ R &\Leftrightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in T\\ &\Rightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in U \quad \text{[por hipótese]}\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in U\circ R\end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que $T\circ R\subseteq U\circ R$.

(i) Como

$$\begin{aligned}(x,y)\in (T\cap U)\circ R &\Leftrightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in T\cap U\\ &\Leftrightarrow (\exists z\in B)(x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in T \text{ e } (z,y)\in U\\ &\Rightarrow (\exists z\in B:\ (x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in T) \text{ e}\\ &\qquad (\exists z\in B:\ (x,z)\in R \text{ e } (z,y)\in U\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in T\circ R \text{ e } (x,y)\in U\circ R\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in (T\circ R)\cap(U\circ R),\end{aligned}$$

podemos concluir que

$$(T\cap R)\circ R\subseteq (T\circ R)\cap((U\circ R).$$

115. Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $R$ uma relação binária de $A$ em $B$.

(a) Determine condições que definam as seguintes relações:

i. $R^{-1}\circ R$; ii. $R\circ R^{-1}$; iii. $R\circ\omega_A$; iv. $\omega_B\circ R$;

(b) Para $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c,d\}$ e $R=\{(1,a),(1,b),(2,b),(2,c)\}$, determine as relações definidas em (a).

116. Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{3,4,5,6\}$. Dê exemplo, ou justifique que não existe, de:

(a) uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ tal que $R=R^{-1}$;

(b) relações binárias $R$ e $S$ em $A$ tais que $R\circ S=S\circ R$ e $R\neq S$;

(c) uma relação binária $R$ em $A$ tal que $\mathrm{id}_A\subseteq R$ e $\mathrm{id}_A\not\subseteq R^{-1}$;

(d) uma relação binária $R$ de $A$ em $B$ tal que $D_R=\emptyset$;

(e) relações binárias $R$ de $A$ em $B$ e $S$ de $B$ em $A$ tais que $R\circ S=\mathrm{id}_B$ e $S\circ R=\mathrm{id}_A$.

117. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y, w, z\}$. Considere as relações binárias $R$, de $A$ em $B$, e $S$, de $B$ em $A$:

$$\begin{aligned} R &= \{(1, x), (1, z), (2, y), (2, z)\} \\ S &= \{(x, 1), (x, 3), (y, 2), (w, 2), (z, 3)\}. \end{aligned}$$

Sejam $T = S \circ R$ e $U = R \circ S$.

(a) Determine $R^{-1}$, $S^{-1}$, $T$, $T \circ T$, $U$ e $U \circ U$.

(b) Verifique que $T^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(c) Indique o domínio e a imagem de $R$.

(d) Indique quantas relações binárias de $A$ em $B$ existem.

(e) Indique todas as relações binárias de $A$ em $B$ cujo domínio é $\{2, 3\}$ e cuja imagem é $\{x, z\}$.

(f) Dê um exemplo de relações binárias não vazias $R'$, de $A$ em $B$, e $S'$, de $B$ em $A$, tais que $S' \circ R' \neq \emptyset$ e $R' \circ S' = \emptyset$.

118. Seja $A$ um conjunto. Diga, justificando, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

(a) Para qualquer relação binária $R$ definida em $A$, $R \circ R^{-1} = \mathrm{id}_A$;

(b) Para qualquer relação binária $R$ definida em $A$, $R \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A \circ R = R$;

(c) Para qualquer relação binária $R$ definida em $A$, $R \subseteq R \circ \omega_A$.

Resolução

(a) A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contra exemplo: Para o conjunto $A = \{1, 2\}$ e a relação binária $R = \{(1, 2)\}$ definida em $A$, temos que

$$R \circ R^{-1} = \{(2, 2)\} \neq \mathrm{id}_A = \{(1, 1), (2, 2)\}.$$

A igualdade só se verifica se $D_R = A$.

(b) A afirmação é verdadeira (o resultado já foi provado no exercício 114, alíneas (a) e (b).

(c) A afirmação é verdadeira. Como $\omega_A = A \times A$, temos que

$$\begin{aligned} (x, y) \in R &\Leftrightarrow (x, x) \in \omega_A \text{ e } (x, y) \in R \\ &\Rightarrow (x, y) \in R \circ \omega_A \end{aligned}$$

## 5 funções

119. Indique, justificando, quais das relações binárias seguintes são aplicações:

   (a) $f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,7)\}$ de $\{1,2,3\}$ em $\{4,5,6,7\}$;
   (b) $f_2 = \{(1,5),(1,4),(2,5),(3,5)\}$ de $\{1,2,3\}$ em $\{4,5\}$;
   (c) $f_3 = \{(x,2x-1) : x \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$;
   (d) $f_4 = \{(x,\frac{1}{x}) : x \in \mathbb{Q}\}$ de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$;
   (e) $f_5 = \{(x,x+1) : x \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$;
   (f) $f_6 = \{(x,x+1) : x \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$;
   (g) $f_7 = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \{(x,-x) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2\}$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;
   (h) $f_8 = \{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \{(x,x^3) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

   Resolução

   A relação binária $f_7$ não é um função, pois, por exemplo, $(1,1) \in f_7$ e $(1,-1) \in f_7$ e, no entanto, $1 \neq -1$.

   A relação $f_8$ é uma função. Observamos primeiro que $D_{f_8} = \mathbb{R}$. Mais ainda, suponhamos que temos $(x,y),(x,z) \in f_8$. Então,

   - se $x > 0$, então, $y = x^2 = z$;
   - se $x < 0$, então, $y = x^3 = z$;
   - se $x = 0$, então, $y,z \in \{x^2,x^3\} = \{0\}$, pelo que $y = z$.

   Assim, podemos afirmar que

$$\forall x \in \mathbb{R}(x,y),(x,z) \in f_8 \Rightarrow y = z.$$

120. Indique, justificando, quais das aplicações apresentadas no exercício anterior são:

   (a) injetivas; (b) sobrejetivas; (c) bijetivas.

121. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a,b,c,d\}$.

   (a) Dê exemplo de uma correspondência de $A$ em $B$ que não seja uma função.
   (b) Indique, caso exista, uma função de $A$ em $B$ que seja

      i. não injetiva;
      ii. injetiva;
      iii. sobrejetiva;
      iv. não sobrejetiva;
      v. bijetiva.

122. Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{a,b,c,d,e\}$. Considere as relações binárias de $A$ em $B$:

$$R_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a),(4,b),(5,a)\}, \qquad R_2 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d),(5,e),(5,a)\},$$

$$R_3 = \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}.$$

(a) Indique, justificando, quais são e quais não são aplicações.

(b) Será a relação binária $R_1^{-1} \circ R_1$ uma aplicação de $A$ em $A$? Justifique.

Resolução

(a) $R_1$ é função pois
$$\forall x \in A, \exists^1 y \in B: \ (x,y) \in R_1.$$
$R_2$ não é função pois
$$(5,e),(5,a) \in R_2 \text{ e } e \neq a.$$
$R_3$ não é função pois $D_{R_3} = \{1,2,3,4\} \neq A$.

(b) Como $(1,a),(3,a) \in R_1$, temos que $(a,1),(a,3) \in R_1^{-1}$. Mais ainda, temos que
$$(1,a) \in R^{-1} \text{ e } (a,1) \in R_1 \Rightarrow (1,1) \in R_1^{-1} \circ R_1$$
e
$$(1,a) \in R^{-1} \text{ e } (a,3) \in R_1 \Rightarrow (1,3) \in R_1^{-1} \circ R_1.$$
Concluímos que $R_1^{-1} \circ R_1$ não é função uma vez que
$$(1,1),(1,3) \in R_1^{-1} \circ R_1 \text{ e } 1 \neq 3.$$

123. Seja $f$ a aplicação definida de $\{1,2,\ldots,10\}$ em $\{1,2,3,4\}$ por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é primo} \\ 2 & \text{se } x \text{ é um par não primo} \\ 3 & \text{se } x \text{ é um ímpar não primo} \end{cases}$$
Determine:

(a) $f^{\rightarrow}(\{4,6,8\})$;

(b) $f^{\rightarrow}(\{2,4,5\})$;

(c) $f^{\rightarrow}(\{1,9\})$;

(d) $f^{\leftarrow}(\{2\})$;

(e) $f^{\leftarrow}(\{1,3\})$;

(f) $f^{\leftarrow}(\{4\})$.

124. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação definida por $g(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Determine:

(a) $g^{\rightarrow}(\{-1,0,1\})$;

(b) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}^-)$;

(c) $g^{\leftarrow}(\{0\})$;

(d) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R})$;

(e) $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-)$.

Resolução

(a) $g^{\rightarrow}(\{-1,0,1\}) = \{g(-1), g(0), g(1)\} = \{1,0\}$;

(b) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}^-) = \{g(x) : x \in \mathbb{R}^-\} = \mathbb{R}^+$;

(c) $g^{\leftarrow}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} = \{0\}$;

(d) $g^{\rightarrow}(\mathbb{R}) = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$;

(e) $g^{\leftarrow}(\mathbb{R}^-) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R}^-\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 0\} = \emptyset$.

125. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, definida por $f(x) = |x| + 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$).

(a) Determine $f^{\rightarrow}(\{-2,1,2\})$, $f^{\leftarrow}(\{1,2,3\})$ e $f^{\leftarrow}(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par}\})$.

(b) Mostre que $f$ não é injetiva.

(c) Será $f$ sobrejetiva? Justifique.

126. Seja $X$ um conjunto. Para cada subconjunto $A$ de $X$, chama-se *função caraterística de* $A$ à função $\chi_A$ definida de $X$ em $\{0,1\}$ por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Sejam $A, B \subseteq X$. Mostre que $\chi_A = \chi_B$ se e só se $A = B$.

127. Seja $X$ um conjunto. Considere $\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida por $\phi(A) = X \backslash A,\ \forall A \in \mathcal{P}(X)$. Mostre que $\phi$ é bijetiva.

128. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \neq 0 \wedge x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $f(A)$, em que $A = \{0, 2, 4\}$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{0, 1, 2\})$.

(c) Diga, justificando, se $f$ é sobrejetiva e/ou injetiva.

129. Considere a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y & \text{se x} \neq 0 \wedge \text{y} \neq 2 \\ x & \text{se y} = 2 \\ y-2 & \text{se x} = 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $f(A)$, em que $A = \{(0, 2), (1, 2), (0, 0), (1, -1)\}$.

(b) Determine $f^{\leftarrow}(\{0\})$.

(c) Diga, justificando, se $f$ é sobrejetiva e/ou injetiva.

130. Sejam $f$, $g$ e $h$ as funções de $\mathbb{N}_0$ em $\mathbb{N}_0$ definidas por:

$$f(n) = n+1,\ \forall n \in \mathbb{N}_0; \qquad g(n) = 2n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0; \qquad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

(a) $f \circ f$;

(b) $f \circ g$;

(c) $g \circ f$;

(d) $g \circ h$;

(e) $(f \circ g) \circ h$;

(f) $f \circ (g \circ h)$.

Resolução

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n+1) = (n+1) + 1 = n+2.$$

Logo,

$$f \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ n & \mapsto & n+2 \end{array}$$

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$$

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = 2(n+1) = 2n + 2.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & 2n+2 \end{array}$$

(d) Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = \begin{cases} g(0) & \text{se } n \text{ é par} \\ g(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} g \circ h: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$$

(e) Usando a alínea (b), para $n \in \mathbb{N}$, temos

$$((f \circ g) \circ h)(n) = (f \circ g)(h(n)) = \begin{cases} (f \circ g)(0) & \text{se } n \text{ é par} \\ (f \circ g)(1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} (f \circ g) \circ h: & \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \end{array}$$

(f) Como a composição de funções, quando definida, é associativa, temos que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, que é a função definida na alínea anterior.

131. Dê exemplos de:

(a) duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f$ e $g$ não sejam constantes e $f \circ g$ seja constante;

(b) uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ mas $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Resolução

(a) Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Então, para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = 1$$

pois $x^2 + 1 > 0$. Logo, $f \circ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função constante.

(b) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = -x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Então, para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x).$$

Logo, $f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

132. (a) Seja $\alpha : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por $\alpha(n) = n + 1$. Mostre que não existe qualquer função $g : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$ mas existe uma infinidade de funções $k : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tais que $k \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$

(b) Seja $\beta : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por

$$\beta(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

mostre que não existe qualquer função $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tal que $f \circ \beta = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$ mas existe uma infinidade de funções $k : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ tais que $\beta \circ k = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$.

133. Considere as funções

$$f: \begin{array}{l} [-1,1] \to [-1,1] \\ x \longmapsto x^3; \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 3; \end{array} \qquad h: \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

Verifique que $f$, $g$ e $h$ são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

Resolução

- A função $f$ é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y.$$

A função $f$ é sobrejetiva pois

$$y \in [-1,1] \Rightarrow \sqrt[3]{y} \in [-1,1] \text{ e } (\sqrt[3]{y})^3 = y \Rightarrow \sqrt[3]{y} \in [-1,1] \text{ e } f(\sqrt[3]{y}) = y.$$

A sua função inversa é

$$f^{-1} \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sqrt[3]{y} \end{array}.$$

- A função $g$ é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$g(x) = g(y) \Rightarrow 2x - 3 = 2y - 3 \Rightarrow x = y.$$

A função $g$ é sobrejetiva pois

$$y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R} \text{ e } f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\frac{y+3}{2} - 3 = y.$$

A sua função inversa é

$$g^{-1} \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{y+3}{2} \end{array}.$$

- A função $h$ é injetiva pois, para $x, y \in \mathbb{Z}$, temos que

$$h(x) = h(y) \Rightarrow x = y.$$

De facto, para $h(x) = h(y)$ se verificar apenas podemos ter duas situações: ou $x, y \geq 0$ ou $x, y < 0$. A igualdade $x = y$ nestes casos é imediata. A função $h$ é sobrejetiva pois

$$y \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}_0^+ & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2} \in \mathbb{Z}^- & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad \text{e } n = \begin{cases} h(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ par} \\ h(-\frac{n+1}{2}) & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

A sua função inversa é

$$\begin{array}{rccl} h^{-1} & \mathbb{N}_0 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \end{array}.$$

134. Sejam $A$ e $B$ conjuntos, $f$ uma função de $A$ em $B$, $A_1$ e $A_2$ subconjuntos de $A$ e $B_1$ e $B_2$ subconjuntos de $B$. Mostre que:

(a) se $A_1 \subseteq A_2$, então $f^{\rightarrow}(A_1) \subseteq f^{\rightarrow}(A_2)$;

(b) se $B_1 \subseteq B_2$, então $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$;

(c) $f^{\rightarrow}(A_1 \cap A_2) \subseteq f^{\rightarrow}(A_1) \cap f^{\rightarrow}(A_2)$;

(d) $f^{\leftarrow}(B_1 \cap B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cap f^{\leftarrow}(B_2)$;

(e) $f^{\rightarrow}(A_1 \cup A_2) = f^{\rightarrow}(A_1) \cup f^{\rightarrow}(A_2)$;

(f) $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$.

Resolução

(b) Sabendo que $B_1 \subseteq B_2$. queremos provar que $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$. Seja $x \in A$. Então,

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(B_1) & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 && [\text{definição de } f^{\leftarrow}(B_1)] \\ & \Rightarrow f(x) \in B_2 && [\text{por hipótese }] \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_2). && [\text{definição de } f^{\leftarrow}(B_2)] \end{aligned}$$

Logo, $f^{\leftarrow}(B_1) \subseteq f^{\leftarrow}(B_2)$.

(e) Seja $y \in B$. Então,

$$\begin{aligned} y \in f^{\rightarrow}(A_1 \cup A_2) & \Leftrightarrow \exists x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y \\ & \Leftrightarrow \exists x \in A_1 : f(x) = y \text{ ou } \exists x \in A_2 : f(x) = y \\ & \Leftrightarrow y \in f^{\rightarrow}(A_1) \text{ ou } y \in f^{\rightarrow}(A_2) \\ & \Leftrightarrow y \in f^{\rightarrow}(A_1) \cup f^{\rightarrow}(A_2) \end{aligned}$$

Logo, $f^{\rightarrow}(A_1 \cup A_2) = f^{\rightarrow}(A_1) \cup f^{\rightarrow}(A_2)$.

(f) Seja $x \in A$. Então,

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \\ & \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \text{ ou } f(x) \in B_2 \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \text{ ou } x \in f^{\leftarrow}(B_2) \\ & \Leftrightarrow x \in f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2) \end{aligned}$$

Logo, $f^{\leftarrow}(B_1 \cup B_2) = f^{\leftarrow}(B_1) \cup f^{\leftarrow}(B_2)$.

135. (a) Dê um exemplo de uma função $f : A \to B$ e de conjuntos $X, Y \subseteq A$ tais que $X \subset Y$ mas que $f(X) = f(Y)$.

(b) Dê um exemplo de uma função $g : C \to D$ e de conjuntos $S, T \subseteq D$ tais que $S \subset T$, mas que $g^{\leftarrow}(S) = g^{\leftarrow}(T)$.

136. Sejam $A, B$ e $S$ conjuntos tais que $S \subseteq A$.

(a) Se $f : A \to B$ é uma função injetiva, será que a sua restrição a $S$, $f|_S$, é necessariamente uma função injetiva?

(b) Se $g : A \to B$ é uma função sobrejetiva, será que a sua restrição a $S$, $g|_S$, é necessariamente uma função sobrejetiva?

Resolução

(a) Sim. Sejam $x_1, x_2 \in S$ tais que $f|_S(x_1) = f|_S(x_2)$. Então, $f(x_1) = f(x_2)$ e, portanto, como $f$ é injetiva, temos que $x_1 = x_2$. Logo, $f|_S$ é injetiva.

(b) Não. Considere-se o seguinte contraexemplo: Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ e $S = \{1, 2\}$. A função $g = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ é uma função sobrejetiva de $A$ em $B$. No entanto,

$$g|_S = \{(1, 4), (2, 5)\}$$

não é uma função sobrejetiva de $S$ em $B$, pois $6 \in B$ e não existe $x \in S$ tal que $g|_S(x) = 6$.

137. Sejam $A$ e $B$ conjuntos e sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ funções tais que $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Mostre que

(a) $f$ é sobrejetiva;

(b) $g$ é injetiva;

(c) $g$ é sobrejetiva se e só se $f$ é injetiva.

138. Seja $f : \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ definida por $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, para $n \geq 2$. Mostre que

(a) $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \geq 2$;

(b) existem exatamente quatro elemento $i$ de $\mathbb{N}_0$ tais que $(f \circ f)(i) = f(i)$;

(c) $f(5n)$ é divisível por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$;

(d) $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Resolução (a) Provemos o resultado usando o Método de Indução Completa. Como caso base $(n = 2)$, temos de verificar que $f(2) < f(3)$. De facto, temos

$$f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1$$

e

$$f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2,$$

pelo que se verifica a desigualdade. Suponhamos agora que, dado $n \geq 2$, $f(k) < f(k+1)$, para todo $2 \leq k \leq n$. Queremos provar que $f(n+1) < f(n+2)$. Na realidade, temos que

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) < f(n+1) + f(n) = f(n+2).$$

Aplicando o princípio de indução matemática, podemos concluir que

$$f(n) < f(n+1), \forall n \geq 2.$$

(b) Observamos primeiro que:

$$\begin{aligned}f(f(0)) &= f(0)\\ f(f(1)) &= f(1)\\ f(f(2)) &= f(1) = 1 = f(2).\end{aligned}$$

Mais ainda, pela alínea (a), se restringirmos $f$ ao conjunto $\{i \in \mathbb{N} : i > 2\}$, a função obtida é injetiva. Assim, para $i > 2$,

$$(f \circ f)(i) = f(i) \Leftrightarrow f(f(i)) = f(i) \Rightarrow f(i) = i \Leftrightarrow i = 5.$$

A última equivalência resulta de termos

$$f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 5, f(6) = 8, f(i+1) > f(i) > i+1, \forall i \geq 6.$$

Assim, $(f \circ f)(i) = f(i)$ se e só se $i \in \{0, 1, 2, 5\}$.

(c) Provemos o resultado usando o Método de Indução Natural. Como caso base ($n = 1$), basta observar que $f(5) = 5$, que é divisível por 5. Suponhamos agora que, dado $n \in \mathbb{N}$, $f(5n)$ é divisível por 5. Queremos provar que $f(5(n+1))$ é divisível por 5. De facto, como

$$\begin{aligned}f(5(n+1)) &= f(5n+5)\\ &= f(5n+4) + f(5n+3)\\ &= f(5n+3) + f(5n+2) + f(5n+3) = 2f(5n+3) + f(5n+2)\\ &= 2(f(5n+2) + f(5n+1)) + f(5n+2) = 3f(5n+2) + 2f(5n+1)\\ &= 3(f(5n+1) + f(5n)) + 2f(5n+1) = 5f(5n+1) + 3f(5n),\end{aligned}$$

podemos concluir, pela hipótese de indução, que $f(5n+5)$ é divisível por 5. Aplicando o princípio de indução matemática, temos que $f(5n)$ é divisível por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Provemos o resultado usando o Método de Indução Natural. Como caso base ($n = 1$), basta observar que

$$f(1+2) = f(3) = 2 = 1 + 1 = 1 + \sum_{i=1}^{1} f(i).$$

Supondo agora que, dado $n \in \mathbb{N}$, $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, queremos provar que $f(n+3) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} f(i)$. De facto,

$$f(n+3) = f(n+2) + f(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i) + f(n+1) = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} f(i).$$

Aplicando o princípio de indução matemática, temos que $f(n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

139. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos.

(a) Mostre que é possível definir uma aplicação bijetiva entre:

i. $(A \times B)^C$ e $A^C \times B^C$;

ii. $(A^B)^C$ e $A^{B \times C}$;

iii. $A^{B \cup C}$ e $A^B \times A^C$ se $B \cap C = \emptyset$.

(b) Será que $B \cap C = \emptyset$ é condição necessária para que exista uma aplicação bijetiva entre $A^{B \cup C}$ e $A^B \times A^C$?

Resolução

(a) i. Para uma função $f$ em $(A \times B)^C$, i.e., uma função de $C$ em $A \times B$, basta considerarmos as funções $f_1$ em $A^C$ e $f_2$ em $B^C$:

$$\begin{array}{rccl} f_1 : & C & \rightarrow & A \\ & x & \mapsto & f_1(x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccl} f_2 : & C & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f_2(x) \end{array}$$

onde $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são tais que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$.
Seja $\phi : (A \times B)^C \rightarrow A^C \times B^C$ a função definida por $\phi(f) = (f_1, f_2)$. Facilmente se verifica que $\phi$ é bijetiva.

# 6 relações de equivalência

140. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ e as seguintes relações definidas em $A$:

$$R_1 = \{(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}, \qquad R_2 = \{(2,3)\},$$
$$R_3 = \{(1,2),(2,3),(3,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}, \qquad R_4 = \{(a,a) : a \in A\} = \text{id}_A.$$

Indique, justificando, se cada uma das relações apresentadas é ou não uma relação:

(a) reflexiva; (b) simétrica; (c) antissimétrica; (d) transitiva.

141. Indique se cada uma das seguintes relações definidas no conjunto $A = \{2,3,4,6,9,10,12,16,20,25\}$ é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva:

(a) $R_1 = \{(2,3),(2,2),(3,3),(4,3),(6,4)\}$;
(b) $R_2 = \{(x,y) \in A^2 : y = x^2\}$;
(c) $|$ é a relação "divide" definida em $A$ por

$$a|b \text{ se e só se } \exists n \in \mathbb{N} : b = na;$$

(d) $<$ é a restrição ao conjunto $A$ da relação "menor" usual em $\mathbb{N}$;
(e) $R_3 = \{(x,y) \in A^2 : y > x^2\}$.

142. Comente o seguinte argumento: *Se uma relação binária $R$ é simétrica e transitiva, então, se $(x,y) \in R$ temos que $(y,x) \in R$ e, portanto, $(x,x) \in R$. Assim, $R$ é também reflexiva.*

143. Indique, justificando, uma relação binária definida em $\mathbb{Z}$ que seja:

(a) reflexiva, simétrica e não transitiva;
(b) reflexiva, transitiva e não simétrica;
(c) simétrica, transitiva e não reflexiva.

Resolução

(a) Seja $\theta$ a relação binária definida em $\mathbb{Z}$ por

$$a \;\theta\; b \Leftrightarrow |a-b| \leq 4, \qquad (a,b \in \mathbb{Z}).$$

Então, $\theta$ é reflexiva, pois, como, para todo $a \in \mathbb{Z}$, $|a-a| = 0 \leq 4$, temos que

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \;\theta\; a.$$

Mais ainda, $\theta$ é simétrica pois, para todos $a,b \in \mathbb{Z}$, $|a-b| = |b-a|$, pelo que trivialmente se tem

$$a \;\theta\; b \Rightarrow b \;\theta\; a.$$

Finalmente, $\theta$ não é transitiva, o que pode ser comprovado pelo seguinte contraexemplo:

$$|7-3| \leq 4 \quad \text{e} \quad |3-(-1)| \leq 4 \quad \text{e} \quad |7-(-1)| \not\leq 4.$$

Com este exemplo, provamos que não se verifica a implicação

$$(a \;\theta\; b \text{ e } b \;\theta\; c) \Rightarrow a \;\theta\; c.$$

(b) Seja $\theta = \{(x,x) : x \in \mathbb{Z}\} \cup \{(1,2)\}$. Então, $\theta$ é reflexiva, transitiva, mas não é simétrica, uma vez que $(1,2) \in \theta$ e $(2,1) \notin \theta$.

(c) Seja $\theta = \{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2)\}$. Então, $\theta$ é simétrica e transitiva, mas não é reflexiva, uma vez que $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \not\subseteq \theta$.

144. Sejam $A$ um conjunto e $R$ e $S$ relações binárias em $A$. Indique, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $R$ é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva), então $R^{-1}$ é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva);

Resolução

- A afirmação
$$R \text{ reflexiva} \Rightarrow R^{-1} \text{ reflexiva}$$
é verdadeira. De facto, temos que
$$\begin{aligned} R \text{ reflexiva} &\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \ x \mathrel{R} x \\ &\Rightarrow \forall x \in A,\ \ x \mathrel{R^{-1}} x \\ &\Leftrightarrow R^{-1} \text{ reflexiva} \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ simétrica} \Rightarrow R^{-1} \text{ simétrica}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x \mathrel{R^{-1}} y &\Leftrightarrow y \mathrel{R} x && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow x \mathrel{R} y && [\text{por hipótese}] \\ &\Leftrightarrow y \mathrel{R^{-1}} x. && [\text{por definição de } R^{-1}] \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ antissimétrica} \Rightarrow R^{-1} \text{ antissimétrica}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x \mathrel{R^{-1}} y \text{ e } y \mathrel{R^{-1}} x &\Leftrightarrow y \mathrel{R} x \text{ e } x \mathrel{R} y && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow x = y && [\text{por hipótese}] \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ transitiva} \Rightarrow R^{-1} \text{ transitiva}$$
é verdadeira. De facto, para $x, y, z \in A$, temos que
$$\begin{aligned} x \mathrel{R^{-1}} y \text{ e } y \mathrel{R^{-1}} z &\Leftrightarrow y \mathrel{R} x \text{ e } z \mathrel{R} y && [\text{por definição de } R^{-1}] \\ &\Rightarrow z \mathrel{R} x && [\text{por hipótese}] \\ &\Leftrightarrow x \mathrel{R^{-1}} z. && [\text{por definição de } R^{-1} \end{aligned}$$

(b) Se $R$ e $S$ são reflexivas (resp. simétricas, antissimétricas, transitivas) então $R \circ S$ é reflexiva (resp. simétrica, antissimétrica, transitiva).

Resolução

- A afirmação
$$R \text{ e } S \text{ reflexivas} \Rightarrow R \circ S \text{ reflexiva}$$
é verdadeira. De facto, temos que
$$\begin{aligned} R \text{ e } S \text{ reflexivas} &\Leftrightarrow \forall x \in A,\ \ x \mathrel{R} x \text{ e } x \mathrel{S} x \\ &\Rightarrow \forall x \in A,\ \ x \mathrel{R \circ S} x \\ &\Leftrightarrow R \circ S \text{ reflexiva} \end{aligned}$$

- A afirmação
$$R \text{ e } S \text{ simétricas} \Rightarrow R \circ S \text{ simétrica}$$
é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1,2,3\}$, considerem-se as relações $R = \{(1,2),(2,1)\}$ e $S = \{(1,3),(3,1)\}$. Então, $R$ e $S$ são relações simétricas e $R \circ S = \{(3,2)\}$ é uma relação não simétrica ($(3,2) \in R \circ S$ e $(2,3) \notin R \circ S$).
- A afirmação
$$R \text{ e } S \text{ antissimétricas} \Rightarrow R \circ S \text{ antissimétrica}$$
é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1,2,3\}$, considerem-se as relações $R = \{(1,2),(1,3)\}$ e $S = \{(3,1),(2,1)\}$. Então, $R$ e $S$ são relações antissimétricas e $R \circ S = \{(3,2),(3,3),(2,2),(2,3)\}$ é uma relação não antissimétrica ($(3,2),(2,3) \in R \circ S$ e $2 \neq 3$).
- A afirmação
$$R \text{ e } S \text{ transitivas} \Rightarrow R \circ S \text{ transitiva}$$
é falsa. Para prová-lo, basta considerar o seguinte exemplo: No conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$, considerem-se as relações $R = \{(1,2),(4,5)\}$ e $S = \{(3,1),(2,4)\}$. Então, $R$ e $S$ são relações transitivas e $R \circ S = \{(3,2),(2,5)\}$ é uma relação não transitiva ($(3,2),(2,5) \in R \circ S$ e $(3,5) \notin R \circ S$).

145. Sejam $A$ um conjunto e $\theta$ e $\rho$ duas relações de equivalência em $A$. Mostre que
$$\theta \circ \rho \text{ é uma relação de equivalência} \iff \theta \circ \rho = \rho \circ \theta.$$

Resolução

Para provarmos esta equivalência, vamos provar uma dupla implicação.

[$\Rightarrow$] Suponhamos que $\theta \circ \rho$ é uma relação de equivalência. Queremos provar que $\theta \circ \rho = \rho \circ \theta$.

Para $x, y \in A$, temos:
$$\begin{array}{rlll} x\ (\theta \circ \rho)\ y & \Rightarrow y\ (\theta \circ \rho)\ x & & [\theta \circ \rho \text{ é simétrica}] \\ & \Leftrightarrow (\exists z \in A)\ y\ \rho\ z \quad \text{e} \quad z\ \theta\ x & & [\text{por definição de } \theta \circ \rho] \\ & \Rightarrow (\exists z \in A)\ z\ \rho\ y \quad \text{e} \quad x\ \theta\ z & & [\theta \text{ e } \rho \text{ são simétricas}] \\ & \Leftrightarrow x\ (\rho \circ \theta)\ y & & [\text{por definição de } \rho \circ \theta] \end{array}$$

Logo,
$$\theta \circ \rho \subseteq \rho \circ \theta.$$

De modo análogo, provamos que $\rho \circ \theta \subseteq \theta \circ \rho$, concluindo assim que
$$\theta \circ \rho = \rho \circ \theta.$$

[$\Leftrightarrow$] Suponhamos agora que $\theta \circ \rho = \rho \circ \theta$. Queremos provar que $\theta \circ \rho$ é uma relação de equivalência, isto é, é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

- $\theta \circ \rho$ é reflexiva: Porque $\rho$ e $\theta$ são reflexivas, temos que, para todo $x \in A$, $x\ \rho\ x$ e $x\ \theta\ x$ e, pela definição de relação composta, podemos concluir que $x\ (\theta \circ \rho)\ x$.

- $\theta \circ \rho$ é simétrica: Sejam $x, y \in A$. Então:

$$
\begin{aligned}
x\ (\theta \circ \rho)\ y \ &\Leftrightarrow (\exists z \in A)\ x\ \rho\ z \quad \text{e} \quad z\ \theta\ y && [\text{por definição de } \theta \circ \rho] \\
&\Rightarrow (\exists z \in A)\ z\ \rho\ x \quad \text{e} \quad y\ \theta\ z && [\theta \text{ e } \rho \text{ são simétricas}] \\
&\Leftrightarrow y\ (\rho \circ \theta)\ x && [\text{por definição de } \rho \circ \theta] \\
&\Leftrightarrow y\ (\theta \circ \rho)\ x && [\text{por hipótese}]
\end{aligned}
$$

- $\theta \circ \rho$ é transitiva: Sejam $x, y, z \in A$ tais que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ y \quad \text{e} \quad y\ (\theta \circ \rho)\ z.$$

Então, por hipótese, temos que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ y \quad \text{e} \quad y\ (\rho \circ \theta)\ z.$$

Por definição da composta de relações, temos então que

$$(\exists a, b \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \theta\ y \quad \text{e} \quad y\ \theta\ b \quad \text{e} \quad b\ \rho\ z.$$

Temos então, pela transitividade de $\theta$, que

$$(\exists a, b \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \theta\ b \quad \text{e} \quad b\ \rho\ z.$$

Pela definição de $\rho \circ \theta$, estamos em condições de concluir que

$$(\exists a \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ (\rho \circ \theta)\ z.$$

Aplicamos novamente a hipótese para obter que

$$(\exists a \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ (\theta \circ \rho)\ z$$

e aplicamos a definição da composta $\theta \circ \rho$ para concluir que

$$(\exists a, c \in A)\ x\ \rho\ a \quad \text{e} \quad a\ \rho\ c \quad \text{e} \quad c\ \theta\ z.$$

Como $\rho$ é transitiva, concluímos que

$$(\exists c \in A)\ x\ \rho\ c \quad \text{e} \quad c\ \theta\ z$$

e, portanto, temos, novamente pela definição de $\theta \circ \rho$, que

$$x\ (\theta \circ \rho)\ z.$$

Logo, $\theta \circ \rho$ é transitiva.

146. Sejam $A$ um conjunto e $\theta$ uma relação binária em $A$. Mostre que $\theta$ é uma relação de equivalência se e só se $\theta$ satisfaz as seguintes duas condições:

I. $\forall x \in A,\ x\ \theta\ x$;

II. $\forall x, y, z \in A$, $x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z \implies z\ \theta\ x$.

Resolução

Por definição, uma relação $\theta$ num conjunto $A$ é uma relação de equivalência se e só se satisfaz as condições:

1. $\forall x \in A,\ x\ \theta\ x$
2. $\forall x, y \in A,\ x\ \theta\ y \Rightarrow y\ \theta\ x$
3. $\forall x, y, z \in A,\ x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z \Rightarrow x\ \theta\ z$

Assim, o que se pretende provar neste exercício é que as condições 1., 2. e 3. são equivalentes às condições I. e II.

Suponhamos primeiro que $\theta$ é uma relação binária em $A$ que satisfaz as condições 1., 2. e 3. Então, a condição I. é naturalmente satisfeita (uma vez que é igual à condição 1.). Mais ainda, para $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned} x\ \theta\ y \text{ e } y\ \theta\ z \ &\Rightarrow x\theta z && \text{[por 3.]} \\ &\Rightarrow z\theta x && \text{[por 2.]} \end{aligned}$$

o que nos permite concluir que $\theta$ satisfaz a condição II.

Reciprocamente, suponhamos que $\theta$ é uma relação binária em $A$ que satisfaz as condições I. e II. Então, a condição 1. é naturalmente satisfeita (pois é igual à condição II.). Sejam $x, y \in A$ tais que $x\ \theta\ y$. Por I., temos que $y\ \theta\ y$ e, aplicando II., concluímos que $y\ \theta\ x$, o que nos permite concluir que a condição 2. é satisfeita por $\theta$. Se $x, y, z \in A$ são tais que $x\ \theta\ y$ e $y\ \theta\ z$, temos, pela condição II, que $z\ \theta\ x$ e, portanto, por 2. (que já foi provado), temos que $x\ \theta\ z$, o que prova a condição 3.

147. Verifique se cada uma das seguinte relações é de equivalência e, em caso afirmativa, determine as classes de equivalência:

(a) Sendo $A$ um conjunto não vazio, $R$ está definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$X\ R\ Y \iff X \cap Y \neq \emptyset \qquad (X, Y \subseteq A);$$

(b) $S$ é a relação em $\mathbb{Z}^2$ definida por $(a, b)\ S\ (c, d) \iff ad = bc$;

(c) $T$ é a relação $T = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x - y| \leq 4\}$;

(d) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $W$ está definida em $\mathcal{P}(A)$ por $X\ W\ Y \iff n(X) = n(Y)$, onde $n(C)$ denota o número de elementos do conjunto $C$.

Resolução

(a) A relação $R$ não é uma relação de equivalência pois não é uma relação reflexiva, uma vez que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ e $\emptyset \not R\ \emptyset$, já que $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

(b) A relação $S$ não é uma relação de equivalência, pois não é uma relação transitiva. De facto, temos, por exemplo, que $(2, 3)\ S\ (0, 0)$ (uma vez que $2 \times 0 = 3 \times 0$) e $(0, 0)\ S\ (4, 5)$ (uma vez que $0 \times 4 = 0 \times 5$), mas $(2, 3) \not S\ (4, 5)$, já que $2 \times 5 \neq 3 \times 4$.

(c) A relação $T$ não é uma relação de equivalência, pois não é transitiva. Por exemplo, temos que $1\ T\ 5$ (pois $|1 - 5| \leq 4$) e $5\ T\ 8$ (pois $|5 - 8| \leq 4$). No entanto, $1 \not T\ 8$, já que $|1 - 8| \not\leq 4$.

(d) A relação binária $W$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$, pois é reflexiva, simétrica e transitiva. Como para todo o subconjunto $X$ de $A$, temos que $n(X) = n(X)$, podemos concluir que

$$\forall X \subseteq A,\ X\ W\ X,$$

e por isso, $W$ é reflexiva.

Para todos $X, Y \subseteq A$, temos que

$$n(X) = n(Y) \Rightarrow n(Y) = n(X),$$

pelo que

$$X \ W \ Y \Rightarrow Y \ W \ X$$

e, portanto, $W$ é simétrica.
Para todos $X, Y; Z \subseteq A$, temos que

$$n(X) = n(Y) \text{ e } n(Y) = n(Z) \Rightarrow n(X) = n(Z),$$

ou seja,

$$X \ W \ Y \text{ e } Y \ W \ Z \Rightarrow X \ W \ Z,$$

o que nos permite concluir que $W$ é transitiva.

Sendo uma relação de equivalência, podemos determinar as classes de equivalência de todos os elementos de $\mathcal{P}(A)$:

- $[\emptyset]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 0\} = \{\emptyset\}$;
- $[\{1\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 1\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\} = [\{2\}]_W = [\{3\}]_W = [\{4\}]_W$;
- $[\{1,2\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 2\} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,3\}, \{3,4\}\} = [\{1,3\}]_W = [\{1,4\}]_W = [\{2,3\}]_W = [\{2,4\}]_W = [\{3,4\}]_W$;
- $[\{1,2,3\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 3\} = \{\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}\} = [\{1,3,4\}]_W = [\{1,2,4\}]_W = [\{2,3,4\}]_W$;
- $[\{1,2,3,4\}]_W = \{X \subseteq A : n(X) = 4\} = \{\{1,2,3,4\}\} = \{A\}$.

148. Seja $n$ um número natural. Considere a relação $\equiv (\mod n)$ definida em $\mathbb{Z}$ por

$$x \equiv y( \mod n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \ x - y = kn \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

(a) Mostre que $\equiv (\mod n)$ é uma relação de equivalência.

(b) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $x \equiv y( \mod n)$; (iii) $x$ e $y$ têm o mesmo resto na divisão por $n$;
(ii) $n|(x - y)$; (iv) $\exists a \in \mathbb{Z} : \ y = x + na$.

(c) Para cada $x \in \mathbb{Z}$, determine a classe de equivalência de $x$. Quantas classes de equivalência existem para a relação $\equiv (\mod n)$?

149. Considere a relação $\equiv (\mod 7)$.

(a) Indique dois elementos da classe $[6]$.

(b) Determine $[5] \cap [-1]$ e $[-4] \cap [3]$.

(c) Encontre o menor inteiro não negativo que está relacionado com

(i) $-10$; (ii) $-17$; (iii) $-7$; (iv) $-2$.

Resolução

(a) Seja $x \in \mathbb{Z}$. Então,

$$x \in [6]_7 \Leftrightarrow x \equiv 6( \mod 7) \Leftrightarrow x - 6 = 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 6 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se considerarmos, por exemplo, $k = 0$ e $k = 1$, obtemos os elementos $6$ e $13$.

(b) Sabemos que, como $\equiv (\mod 7)$ é uma relação de equivalência, então, para $a, b \in \mathbb{Z}$, temos que

$$[a]_7 \cap [b]_7 = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a \not\equiv b(\mod 7) \\ [a]_7 & \text{se } a \equiv b(\mod 7) \end{cases}$$

Assim, como

$$5 - (-1) = 6 \neq 7k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

e

$$-4 - 3 = -7 = 7 \times (-1) \text{ e } -1 \in \mathbb{Z},$$

temos que

$$5 \not\equiv -1(\mod 7) \text{ e } -4 \equiv 3(\mod 7).$$

Logo,

$$[5]_7 \cap [-1]_7 = \emptyset \text{ e } [-4]_7 \cap [-3]_7 = [-4]_7 = \{-4 + 7k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

(c) (i) Como

$$x \equiv -10(\mod 7) \Leftrightarrow x = -10 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com $-10$ é $4$ (que se obtém considerando $k = 2$);

(ii) Como

$$x \equiv -17(\mod 7) \Leftrightarrow x = -17 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com $-17$ é $4$ (que se obtém considerando $k = 3$);

(i) Como

$$x \equiv -7(\mod 7) \Leftrightarrow x = -7 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com $-7$ é $0$ (que se obtém considerando $k = 1$);

(i) Como

$$x \equiv -2(\mod 7) \Leftrightarrow x = -2 + 7k, \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

o menor inteiro não negativo relacionado com $-2$ é $5$ (que se obtém considerando $k = 1$).

150. Indique o menor natural $p$ tal que:

(a) $p \equiv 3312(\mod 4)$;
(b) $p \equiv 26(\mod 13)$;
(c) $p \equiv 177(\mod 8)$;
(d) $p \equiv 111(\mod 109)$.

151. Considere a relação $R$ definida em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por

$$(a, b)\, R (c, d) \text{ se e só se } ad = bc \quad (a, b, c, d \in \mathbb{N}).$$

(a) Verifique que $R$ é uma relação de equivalência.

Resolução A relação $R$ é reflexiva pois, para todo $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $ab = ba$, pelo que $(a, b)\ R\ (c, d)$.

A relação $R$ é simétrica pois, para $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a, b)\ R\ (c, d) &\Leftrightarrow ad = bc \\ &\Leftrightarrow cb = da \\ &\Leftrightarrow (c, d)\ R\ (a, b). \end{aligned}$$

A relação $R$ é transitiva pois, para $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (a, b)\ R\ (c, d) \text{ e } (c, d)\ R\ (e, f) &\Leftrightarrow ad = bc \text{ e } cf = de \\ &\Leftrightarrow adf = bcf \text{ e } bcf = bde \\ &\Rightarrow adf = bde \\ &\Leftrightarrow af = be \Leftrightarrow (a, b)\ R\ (e, f). \end{aligned}$$

(b) Indique as classes de equivalência dos elementos $(1,2)$ e $(4,4)$.

Resolução

$$\begin{aligned}
[(1,2)]_R &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a,b)\ R\ (1,2)\} \\
&= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \times 2 = b \times 1\} \\
&= \{(a,2a) : a \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[(4,4)]_R &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a,b)\ R\ (4,4)\} \\
&= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a \times 4 = b \times 4\} \\
&= \{(a,a) : a \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}$$

(c) Verifique que a relação $R$ é a relação igualdade de imagem associada à função $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(m,n) = \frac{m}{n}$.

Resolução Tendo em conta a função $f$ apresentada, temos que, para $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(a,b)\ R_f\ (c,d) &\Leftrightarrow f((a,b)) = f((c,d)) \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\
&\Leftrightarrow ad = bc \\
&\Leftrightarrow (a,b)\ R\ (c,d).
\end{aligned}$$

Logo, $R_f = R$.

152. Seja $R$ uma relação binária em $A$. Uma relação binária $R'$ em $A$ diz-se o *fecho transitivo (resp. reflexivo, simétrico, de equivalência) de* $R$ se $R'$ é a menor relação binária transitiva (resp. reflexiva, simétrica, de equivalência) em $A$ que contém $R$.

Considere o conjunto $A = \{1,2,3\}$ e a relação $R = \{(1,2),(3,1)\}$ definida em $A$. Determine:

(a) o fecho reflexivo de $R$;
(b) o fecho simétrico de $R$;
(c) o fecho transitivo de $R$;
(d) o fecho de equivalência de $R$.

153. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

(a) As relações $S = \{(1,2),(1,3),(1,1),(2,4),(3,3)\}$ e $U = \{(3,1),(2,1),(1,1),(3,3),(4,4)\}$ não são relações de equivalência. Porquê?

(b) Sejam $T$ o fecho de equivalência de $S$ e $R$ o fecho de equivalência de $U$. Determine $T$ e $R$.

(c) Calcule $[3]_T \cap [2]_T$ e $[3]_R \cap [2]_R$. Justifique.

(d) Indique, caso existam, $x, y \in A$ tais que $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Justifique.

Resolução

(a) As relações binárias $S$ e $U$ não são relações de equivalência em $A = \{1,2,3,4\}$ pois não são reflexivas, uma vez que, por exemplo, $(2,2) \notin S$ e $(2,2) \notin U$.

(b) Para $S \subseteq T$, temos que ter $[1]_T = [2]_T = [3]_T = [4]_T$, uma vez que $(1,2),(1,3),(2,4) \in S$. Logo,

$$A/T = \{\{1,2,3,4\}\},$$

ou seja, $T = \omega_A$.

Para $U \subseteq R$, temos que ter $[1]_R = [2]_R = [3]_R$, uma vez que $(3,1),(2,1) \in U$. Logo, como $R$ tem de ser a menor relação de equivalência que contém $U$, terá que ser a que define mais classes de equivalência, pelo que

$$R = \omega_{\{1,2,3\}} \cup \omega_{\{4\}} = \{(1,1,),(2,2,),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3),(4,4)\}.$$

(c) Uma vez que $3\ T\ 2$, temos que

$$[3]_T \cap [2]_T = [3]_T = \{1,2,3,4\}.$$

Como $3\ R\ 2$, temos que

$$[3]_R \cap [2]_R = [3]_R = \{1,2,3\}.$$

(d) Para $x \in \{1,2,3\}$ e $y \in \{4\}$, temos que $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$, pois $4 \not R\ x$, para todo $x \in \{1,2,3\}$.

154. Considere o conjunto $X = \{1,2,3,4,5\}$ e a relação binária $R$ nele definida por

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}.$$

(a) Justifique que $R$ é reflexiva e simétrica;

(b) Justifique que a relação binária $R$ não é uma relação de equivalência em $X$ e determine o seu fecho de equivalência, i.e., a menor relação de equivalência em $X$ que contém $R$.

155. Sejam $A$ e $B$ conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Define-se a *relação igualdade de imagem* $R_f$ em $A$ por

$$(x,y) \in R_f \ \Leftrightarrow\ f(x) = f(y) \quad (x,y \in A).$$

(a) Mostre que $R_f$ é uma relação de equivalência.

(b) Determine as classes de equivalência para a relação $R_f$ e o conjunto quociente $A/R_f$.

(c) Indique em que circunstâncias é que (i) $R_f = \mathrm{id}_A$; (ii) $R_f = A \times A$.

156. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $\theta$ a relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ por

$$B\,\theta\,C \Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\}.$$

(a) Mostre que $\theta$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.

(b) Indique todos os elementos de $[\{3,4\}]_\theta$.

Resolução

(a) Como, para todo $B \subseteq A$, $B \cap \{2,4\} = B \cap \{2,4\}$, temos que $B\ \theta\ B$. Logo, $\theta$ é reflexiva. Mais ainda, para $B, C \subseteq A$,

$$B\ \theta\ C \Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\} \Leftrightarrow C \cap \{2,4\} = B \cap \{2,4\} \Leftrightarrow C\ \theta\ B,$$

pelo que $\theta$ é simétrica.

Finalmente, para $B, C, D \subseteq A$, temos que

$$\begin{aligned} B\ \theta\ C \text{ e } C\ \theta\ D \ &\Leftrightarrow B \cap \{2,4\} = C \cap \{2,4\} \text{ e } C \cap \{2,4\} = D \cap \{2,4\} \\ &\Rightarrow B \cap \{2,4\} = D \cap \{2,4\} \\ &\Leftrightarrow B\ \theta\ D \end{aligned}$$

e, portanto, $\theta$ é transitiva.

Estamos em condições de concluir que $\theta$ é uma relação de equivalência.

(b) Considerando a definição de classe de equivalência de um elemento, temos que

$$\begin{aligned} [\{3,4\}]_\theta \ &= \{B \subseteq A : B \cap \{2,4\} = \{3,4\} \cap \{2,4\}\} \\ &= \{B \subseteq A : B \cap \{2,4\} = \{4\}\} \\ &= \{B \subseteq A : 2 \notin B \text{ e } 4 \in B\} \\ &= \{\{4\},\{1,4\},\{3,4\},\{1,3,4\}\}. \end{aligned}$$

157. Para cada uma das relações de equivalência seguintes, determine as classes de equivalência indicadas:

(a) $[0]_R$ e $[3]_R$, onde $R$ é a relação de equivalência definida por

$$a\ R\ b \iff |a| = |b| \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R});$$

(b) $[0]_S$ e $[\pi]_S$, onde $S$ é a relação de equivalência definida por

$$a\ S\ b \iff \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R});$$

(c) $[0]_T$ e $[3]_T$, onde $T$ é a relação de equivalência definida por

$$a\ T\ b \iff \exists n \in \mathbb{Z}: \ a = 2^n b \qquad (\forall a, b \in \mathbb{N});$$

(d) $[(0,0)]_V$ e $[(3,4)]_V$, onde $V$ é a relação de equivalência definida por

$$(a,b)\ V\ (c,d) \iff a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \qquad (\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2);$$

158. Seja $A = \{2,3,4,6,7\}$ e sejam

$\Pi_1 = \{\{2,4\},\{3\},\{4,6\},\{3,6,7\}\}$, $\Pi_2 = \{\{2,4,6\},\{3,7\}\}$,
$\Pi_3 = \{\{2\},\{3,4,7\}\}$, $\Pi_4 = \{\{2\},\{3\},\{4\},\{6\},\{7\}\}$,
$\Pi_5 = \{\{2\},\emptyset,\{3,4\},\{6,7\}\}$, $\Pi_6 = \{\{2,6\},\{3,7\},\{4\}\}$.

(a) Indique, justificando, quais dos conjuntos $\Pi_j$ $(1 \le j \le 6)$ são partições de $A$.

(b) Para cada um dos conjuntos $\Pi_j$ $(1 \le j \le 6)$ que é partição de $A$, determine a relação de equivalência em $A$ associada a $\Pi_j$.

Resolução

(a)
- $\Pi_1$ não é uma partição de $A$ pois $\{2,4\},\{4,6\} \in \Pi_1$ e $\{2,4\} \cap \{4,6\} \neq \emptyset$;
- $\Pi_2$ é uma partição de $A$, pois:
  - $\{2,4,6\} \neq \emptyset$ e $\{3,7\} \neq \emptyset$;
  - $\{2,4,6\} \cap \{3,7\} = \emptyset$;
  - $\{2,4,6\} \cup \{3,7\} = A$
- $\Pi_3$ não é partição de $A$ pois $6 \in A$ e $6 \notin X$, para todo $X \in \Pi_3$.
- $\Pi_4$ é uma partição de $A$, pois:
  - $\{2\} \neq \emptyset$, $\{3\} \neq \emptyset$, $\{4\} \neq \emptyset$, $\{6\} \neq \emptyset$ e $\{7\} \neq \emptyset$;
  - $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{4\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{7\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{4\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{3\} \cap \{7\} = \emptyset$, $\{4\} \cap \{6\} = \emptyset$, $\{4\} \cap \{7\} = \emptyset$ e $\{6\} \cap \{7\} = \emptyset$;
  - $\{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{7\} = A$
- $\Pi_5$ não é uma partição pois $\emptyset \in \Pi_5$;
- $\Pi_6$ é uma partição de $A$, pois:
  - $\{2,6\} \neq \emptyset$, $\{3,7\} \neq \emptyset$ e $\{4\} \neq \emptyset$;
  - $\{2,6\} \cap \{3,7\} = \emptyset$, $\{2,6\} \cap \{4\} = \emptyset$ e $\{3,7\} \cap \{4\} = \emptyset$;
  - $\{2,6\} \cup \{3,7\} \cup \{4\} = A$

(b)
- A relação de equivalência associada à partição $\Pi_2$ é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_2} &= \omega_{\{2,4,6\}} \cup \omega_{\{3,7\}} \\ &= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6),(3,3),(3,7),(7,3),(7,7)\} \end{aligned}$$

- A relação de equivalência associada à partição $\Pi_4$ é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_4} &= \omega_{\{2\}} \cup \omega_{\{3\}} \cup \omega_{\{4\}} \cup \omega_{\{6\}} \cup \omega_{\{7\}} \\ &= \{(2,2), ((3,3), (4,4), (6,6), (7,7)\} \end{aligned}$$

- A relação de equivalência associada à partição $\Pi_6$ é

$$\begin{aligned} R_{\Pi_2} &= \omega_{\{2,6\}} \cup \omega_{\{3,7\}} \cup \omega_{\{4\}} \\ &= \{(2,2), (2,6), (6,2), (6,6), (3,3), (3,7), (7,3), (7,7), (4,4)\} \end{aligned}$$

159. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Em que condições é que $\{A \cap B, A \setminus B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$?

Resolução

Sabemos que, para quaisquer conjuntos $A$ e $B$,

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$$

e que

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset, \qquad (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset, \qquad (A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset.$$

Assim, para concluirmos que $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$, falta apenas garantir que

$$A \setminus B \neq \emptyset, \qquad A \cap B \neq \emptyset, \qquad B \setminus A \neq \emptyset.$$

Logo, $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$ é uma partição de $A \cup B$ se e só se $A$ e $B$ têm pelo menos um elementos em comum, $B$ tem um elemento que não é elemento de $A$ e $A$ tem um elemento que não é elemento de $B$.

160. (a) Sejam $P_1 = \{X_1, X_2, ..., X_m\}$ e $P_2 = \{Y_1, Y_2, ..., Y_n\}$ duas partições de um conjunto $A$. Mostre que o conjunto

$$P = \{X_i \cap Y_j : i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\} \setminus \{\emptyset\}$$

é também uma partição de $A$ (a esta partição chama-se partição cruzada de $A$ associada às partições de $P_1$ e $P_2$ de $A$).

(b) Determine a partição cruzada de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ associa da às partições $P_1 = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\}\}$ e $P_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$ de $A$.

Resolução

(a) Começamos por observar que, dados $X_i \in P_1$ $(i = 1, 2, ..., m)$ e $Y_j \in P_2$ $(j = 1, 2, ..., n)$, temos que

$$X_i \cap Y_j \in P \Leftrightarrow X_i \cap Y_j \neq \emptyset.$$

Deste modo, para $X_i, X_{i_1}, X_{i_2} \in P_1$ $(i, i_1, i_2 \in \{1, 2, ..., m\})$ e $Y_j, Y_{j_1}, Y_{j_2} \in P_2$ $(j, j_1, j_2 \in \{1, , 2, ..., n\})$, temos que

- se $X_i \cap Y_j \in P$, então $X_i \cap Y_j \neq \emptyset$;
- se $X_{i_1} \cap Y_{j_1}, X_{i_2} \cap Y_{j_2} \in P$ então

$$(X_{i_1} \cap Y_{j_1}) \cap (X_{i_2} \cap Y_{j_2}) = (X_{i_1} \cap X_{i_2}) \cap (Y_{j_1} \cap Y_{j_2}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset;$$

- Temos que

$$\bigcup_{X_i \cap Y_j \in P} (X_i \cap Y_j) = \bigcup_{\substack{i = 1, 2, ..., m \\ j = 1, 2, ..., n}} (X_i \cap Y_j) = (\bigcup_{i=1,2,...,m} X_i) \cap (\bigcup_{j=1,2,...,n} Y_j) = A \cap A = A.$$

Logo, $P$ é uma partição de $A$.

(b) Considerando $X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{5,6,7,8\}$, $Y_1 = \{1,2\}$, $Y_2 = \{3,4,5\}$ e $Y_3 = \{6,7,8\}$, obtemos

$$\begin{array}{ll} X_1 \cap Y_1 = \{1,2\} & X_2 \cap Y_1 = \emptyset \\ X_1 \cap Y_2 = \{3,4\} & X_2 \cap Y_2 = \{5\} \\ X_1 \cap Y_3 = \emptyset & X_3 \cap Y_3 = \{6,7,8\} \end{array}$$

Logo,

$$P = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7,8\}\}.$$

161. Considere o conjunto $A = \{2,5,8,3,6,7,9\}$ e a relação de equivalência $R$ definida em $A$ por

$$x\,R\,y \Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ têm o mesmo número de divisores naturais} \qquad (x,y \in A).$$

(a) Dê exemplo de uma função $f$ tal que $R$ é a relação igualdade de imagem associada a $f$.

(b) Determine a partição de $A$ associada a $R$, isto é, o conjunto quociente $A/R$.

(c) Indique a relação de equivalência associada à partição determinada na alínea anterior.

162. (a) Seja $R$ a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por

$$x \; R \; y \iff |x-y| \text{ é ímpar} \qquad (x,y \in \mathbb{N}).$$

Mostre que $R$ não é uma relação de equivalência;

(b) Seja $R$ a relação binária definida em $\mathbb{N}$ por

$$x \; R \; y \iff |x-y| \text{ é par} \qquad (x,y \in \mathbb{N}).$$

Mostre que $R$ é uma relação de equivalência e descreva a partição de $\mathbb{N}$ obtida por $R$.

# 7 relações de ordem parcial

163. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e sejam $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ e $\rho_4$ as seguintes relações em $A$:

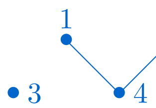
$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \{(1,1),(4,1),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4)\};\\
\rho_2 &= \{(1,1),(1,4),(2,2),(4,2),(3,3),(4,4),(2,4)\};\\
\rho_3 &= \{(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,3),(4,4),(3,1)\};\\
\rho_4 &= \mathrm{id}_{\,A}.
\end{aligned}$$

Indique se cada uma destas relações é uma ordem parcial e, em caso afirmativo, apresente o correspondente diagrama de Hasse.

Resolução

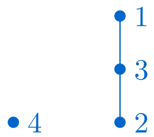
- A relação $\rho_1$ é reflexiva, pois $id_A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\} \subseteq \rho_1$. A relação é também antissimétrica, uma vez que se $a, b \in A$ são tais que $(a, b) \in \rho_1$ e $a \neq b$, tem-se que $(b, a) \notin \rho_1$. Por último, $\rho_1$ é uma relação transitiva, pois $\rho_1 \circ \rho_1 = \rho_1$. Assim, estamos em condições de concluir que $\rho_1$ é uma relação de ordem parcial em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_1)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

- A relação binária $\rho_2$ não é antissimétrica, uma vez que $(4, 2), (2, 4) \in \rho_2$ e $4 \neq 2$. Assim, a relação $\rho_2$ não é uma relação de ordem parcial.
- A relação binária $\rho_3$ é reflexiva (pois $\mathrm{id}_{\,A} \subseteq \rho_3$), é antissimétrica (pois $\rho_3 \cap \rho_3^{-1} = \mathrm{id}_{\,A}$) e é transitiva (pois $\rho_3 \circ \rho_3 = \rho_3$). Logo, a relação binária é uma relação de ordem parcial em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_3)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

- A relação identidade definida em qualquer conjunto é uma relação de ordem. Assim, $\rho_4$ é uma relação de ordem em $A$.

  O c.p.o. $(A, \rho_4)$ pode ser representado pelo seguinte diagrama de Hasse:

164. (a) Mostre que os seguintes pares são c.p.o.'s:

  (i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, onde $A$ é um conjunto; (ii) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação "*divide*".

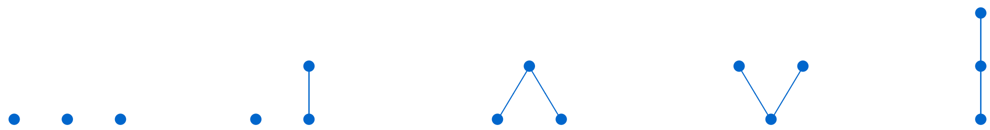
  (b) Construa diagramas de Hasse para os seguintes c.p.o.'s:

  (i) $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, sendo $A = \{1, 2, 3\}$; (ii) $(A, |)$, sendo $A = \{2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$.

165. Determine todas as ordens parciais possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com três elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

Resolução

Considerando o conjunto $A = \{a, b, c\}$ e que uma relação binária em $A$ é um subconjunto do conjunto $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ (que tem $3^2 = 9$ elementos), podemos concluir que existem $2^9 = 512$ relações binárias em $A$. Destas, existem 19 que são relações de ordem parcial. No entanto, algumas destas ordens definem, com $A$, c.p.o.'s isomorfos. Como c.p.o.'s isomorfos podem ser representados pelo mesmo diagrama de Hasse, basta considerarmos um deles (daí a expressão "a menos de um isomorfismo"). Assim, para representarmos todas as ordens possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com três elementos, basta construir os diagrama de Hasse possíveis que, neste caso, são 5:

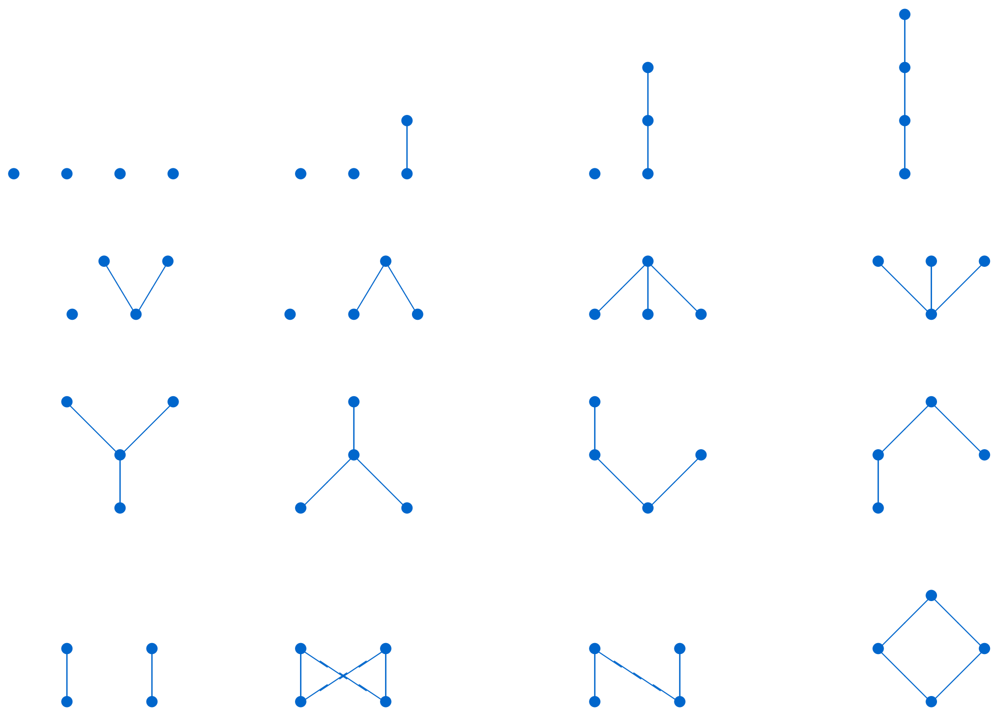


Dos 19 c.p.o.'s possíveis de definir em $A = \{a, b, c\}$, 1 tem o primeiro diagrama, 6 têm o segundo diagrama, 3 têm o terceiro diagrama, 3 têm o quarto diagrama e 6 têm o quinto diagrama.

166. Determine todas as ordens parciais possíveis, a menos de um isomorfismo, num conjunto com quatro elementos e construa os diagramas de Hasse correspondentes.

Resolução

No conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ é possível definir 219 ordens parciais. A menos de um isomorfismo, existem 16 ordens parciais diferentes, representadas pelos seguintes diagramas de Hasse:



167. Construa o diagrama de Hasse para c.p.o. $(A, \subseteq)$, em que

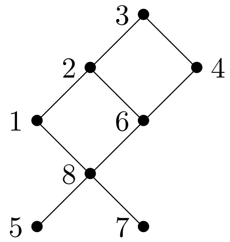
$$A = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 5, 3\}\}.$$

168. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) No c.p.o. $(\mathbb{N}, \leq)$, em $\mathbb{N}$ não existem elementos maximais e $1$ é o único elemento minimal;

(b) No c.p.o. $(\mathbb{Z}, \leq)$, em $\mathbb{Z}$ não existem elementos maximais nem elementos minimais.

169. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $X = \{1, 2, 6\}$ e $Y = \{2, 3, 4, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ com o seguinte diagrama de Hasse:




(a) Determine, caso existam, o máximo e o mínimo de $X$ e de $Y$, bem como os elementos maximais e minimais de $X$ e de $Y$.

(b) Determine os conjuntos dos majorantes e dos minorantes de $X$ e de $Y$ e, caso existam, o supremo e o ínfimo de $X$ e de $Y$.

Resolução

(a) Relativamente ao conjunto $X = \{1, 2, 6\}$, temos que $\max X = 2$ e $\min X$ não existe. No que diz respeito ao conjunto $Y = \{2, 3, 4, 8\}$, temos que $\max Y = 3$ e $\min Y = 8$. Os elementos 1 e 6 são elementos minimais de $X$ e o elemento 2 é elemento maximal de $X$. O elemento 3 é elemento maximal de $Y$ e 8 é elemento minimal de $Y$. (Observação: se existe o máximo de um subconjunto $B$ de $A$, então esse elemento é o único elemento maximal do conjunto $B$. Dualmente, se existe o mínimo de $B$, esse elemento é o único elemento minimal de $B$.)

(b) O conjunto dos majorantes de $X$ é

$$\text{Maj } X = \{a \in A : a \geq x, \forall x \in X\} = \{2, 3\}$$

e o conjunto dos minorantes de $X$ é

$$\text{Min } X = \{a \in A : a \leq x, \forall x \in X\} = \{5, 7, 8\}.$$

O conjunto dos majorantes de $Y$ é

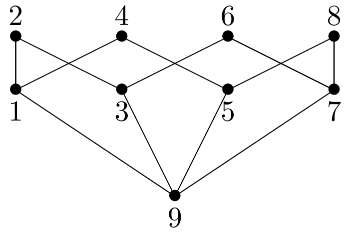
$$\text{Maj } Y = \{a \in A : a \geq x, \forall x \in Y\} = \{3\}$$

e o conjunto dos minorantes de $Y$ é

$$\text{Min } Y = \{a \in A : a \leq x, \forall x \in Y\} = \{5, 7, 8\}.$$

Tendo em conta que $\text{Maj } X$ admite 2 como elemento mínimo, concluímos que $\sup X = 2$ e, como $8$ é o elemento mínimo de $\text{Min } X$, concluímos que $8$ é o ínfimo de $X$. De modo análogo, como $3$ é o elemento mínimo de $\text{Maj } Y$, temos que $3$ é o supremo de $Y$ e, como $8$ é o elemento máximo de $\text{Min } Y$, concluímos que $\inf Y = 8$.

170. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e o c.p.o. $(A, \leq)$ representado pelo diagrama de Hasse



Indique, justificando,

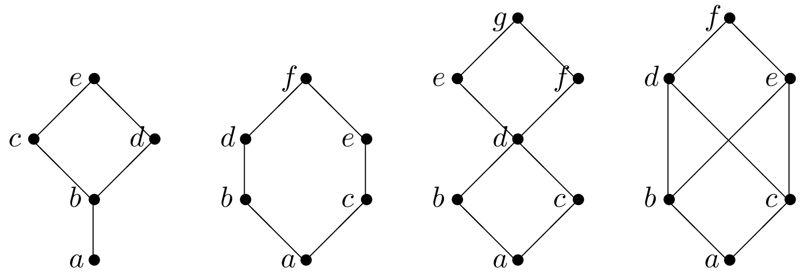
(a) elementos $x, y \in A$ não comparáveis e tais que $\{x, y\}$ tenha supremo;

(b) um subconjunto $X$ de $A$ com exatamente 4 elementos e tais que $(X, \leq_X)$ seja um reticulado;

(c) um subconjunto $Y$ de $A$ que tenha exatamente 2 elementos maximais e 3 elementos minimais.

171. Mostre que se $(A, \leq)$ é um reticulado então $(A, \leq_d)$ é um reticulado. Que pode afirmar sobre o recíproco desta afirmação?

172. Considere os c.p.o.'s que se seguem e, para cada um deles, diga justificando se se trata ou não de um reticulado.



Para cada c.p.o. referido, considere os subconjuntos $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{d, e\}$. Determine, caso existam, sup $X$, sup $Y$, inf $X$ e inf $Y$.

173. Seja $A$ um conjunto. Mostre que $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado com elemento máximo e elemento mínimo.

Resolução

Começamos por observar que dados dois subconjuntos quaisquer $X$ e $Y$ de $A$, $X \cap Y$ é o maior subconjunto de $A$ contido em $X$ e em $Y$ e $X \cup Y$ é o menor subconjunto de $A$ que contém $X$ e $Y$. Assim, para todos $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, temos que

$$\sup\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\} = \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \qquad \text{e} \qquad \inf\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}\} = \mathrm{X} \cup \mathrm{Y}.$$

Logo, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é um reticulado.

Mais ainda, como para todo $X \subseteq A$ se tem $\emptyset \subseteq X \subseteq A$, podemos concluir que $\min \mathcal{P}(A) = \emptyset$ e que $\max \mathcal{P}(A) = A$.

174. Dê exemplo de um c.p.o. no qual não existe inf $\emptyset$.

Resolução Começamos por observar que, sendo $A$ um c.p.o., temos, por definição, que

$$\mathrm{Min}\, \emptyset = \{a \in A : \forall x \in \emptyset, a \leq x\}.$$

Como a condição

$$\forall x \in \emptyset, a \leq x$$

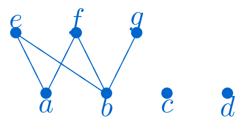
é satisfeita por todos os elementos $a \in A$, concluímos que $\mathrm{Min}\, \emptyset = A$.

Assim, existe inf $\emptyset$ se e só se existe $\max A$. Considere-se, por exemplo, o c.p.o. $(\mathbb{N}, \leq)$ (onde $\leq$ é a ordem usual de números naturais). Como $\mathbb{N}$ não tem elemento máximo, concluímos que, neste c.p.o., o subconjunto $\emptyset$ não admite ínfimo.

175. Dê um exemplo de um c.p.o. com 7 elementos, dos quais **exatamente** 5 são maximais e 4 são minimais.

Resolução

Num c.p.o. com 7 elementos só podemos ter 5 elementos maximais e 4 elementos minimais se alguns dos elementos forem simultaneamente minimais e maximais. Um elemento nestas condições é representado, no diagrama de Hasse, por um ponto isolado. Assim, um c.p.o. que corresponde ao pedido pode ser, por exemplo, o c.p.o. $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, cuja ordem parcial é definida pelo diagrama de Hasse




Neste c.p.o. com 7 elementos, os elementos $a$, $b$, $c$ e $d$ são elementos minimais e os elementos $c$, $d$, $e$, $f$ e $g$ são elementos maximais de $A$

176. Sejam $(A, \leq)$ um c.p.o. e $X \subset A$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições:
   (a) Se $X$ tem um elemento maximal então $X$ tem elemento máximo;
   (b) Se $X$ tem elemento máximo então $X$ tem um elemento maximal;
   (c) Se existe sup $X$ então $X$ tem um elemento maximal;
   (d) Se $X$ tem em elemento maximal então existe sup $X$;
   (e) Existe, no máximo, um ínfimo de $X$.

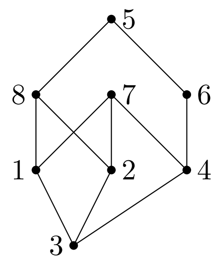
177. Considere, em $\mathbb{N}^2$, a ordem parcial $R$ definida por

$$(a, b)\, R\, (c, d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ e } b \leq d,$$

sendo $\leq$ a ordem usual em $\mathbb{N}$.

   (a) Diga, justificando, se o c.p.o. $(\mathbb{N}^2, R)$ é cadeia.
   (b) Determine, caso existem, o supremo e o ínfimo de $\{(2, 4), (3, 5)\}$.
   (c) Diga, justificando, se o c.p.o. $(\mathbb{N}^2, R)$ é reticulado.

178. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Considere o c.p.o. $(A, \leq)$ cuja relação de ordem parcial é dada pelo diagrama de Hasse




   (a) Seja $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Determine, caso existam, Maj $X$, Min $X$, $\max X$ e $\min X$.
   (b) Justifique que $\sup \emptyset = 3$ e que não existe $\inf \emptyset$.
   (c) Dê exemplo de um subconjunto de $A$ com exactamente 3 elementos e que tenha 2 elementos minimais e 2 elementos maximais.
   (d) Dê exemplo, justificando, de um subconjunto $Y$ de $A$ tal que $(Y, \leq_Y)$ é um reticulado.

179. Mostre que se $(P, \leq)$ é um reticulado e $x$ é elemento maximal, então $x$ é elemento máximo. Mostre que, em geral, num conjunto parcialmente ordenado, esta afirmação não é verdadeira.

Resolução

Seja $P$ um reticulado e $x \in P$ um elemento maximal de $P$. Então, sabemos que

$$y \in P \text{ e } x \leq y \Rightarrow x = y.$$

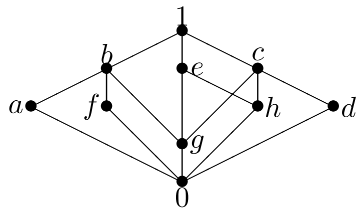
Queremos provar que, nestas condições, $x = \max P$, i.e., que $\forall y \in P, \qquad y \leq x$. Seja $y \in P$. Como $P$ é reticulado, sabemos que $x \vee y \in P$. Como, por definição de supremos, temos que $x \leq x \vee y$, podemos concluir, por hipótese que $x \vee y \leq x$. Das proposições

$$x \leq x \vee y \qquad \text{e} \qquad x \vee y \leq x$$

concluímos que $x = x \vee y$, o que significa que $y \leq x$, como queríamos demonstrar.

O resultado que acabamos de provar é verdadeiro porque podemos considerar o supremo do conjunto $\{x, y\}$, para qualquer $y \in P$, que só temos garantia de existir num reticulado. Assim, se considerarmos um c.p.o. onde não exista o supremo de um elemento maximal e outro elemento, a afirmação já não se verifica. É o caso do c.p.o. $A = \{a, x, y\}$ com a ordem $\leq = \{(a, a), (x, x), (y, y), (a, x), (a, y)\}$.

180. Considere o c.p.o. $(X, \leq)$ definido pelo seguinte diagrama de Hasse:




(a) Considere o subconjunto $A = \{0, f, g, h\}$ de $X$. Indique, caso exista:

i. Os elementos minimais e os elementos maximais de $A$;

ii. O ínfimo e o supremo de $A$;

iii. o máximo e o mínimo de $A$.

(b) Justifique que $X$ não é um conjunto bem ordenado nem um reticulado.

181. Sejam $(X, \leq)$ um c.p.o. e $b \in X$ um elemento arbitrariamente fixado em $X$. Considere o conjunto $F_b = \{x \in X : b \leq x\}$.

(a) Justifique que $F_b \neq \emptyset$;

(b) Mostre que $F_b$ satisfaz a seguinte condição:

$$y \in F_b \wedge y \leq a \Longrightarrow a \in F_b \qquad\qquad (a \in X)$$

(c) Mostre que $F_b$ é o menor subconjunto de $X$ que contém $b$ e satisfaz a condição da alínea (b).

182. Sejam $(P, \leq)$ e $(Q, \leq')$ dois c.p.o.'s e $f : P \longrightarrow Q$ uma aplicação isótona e sobrejetiva. Mostre que:

(a) Se $(P, \leq)$ tem elemento máximo, $(Q, \leq')$ também tem elemento máximo.

(b) Se $a$ é um elemento minimal de $(P, \leq)$, o elemento $f(a)$ não é, necessariamente, um elemento minimal de $(Q, \leq')$.

(c) Se $b \ll a$ em $(P, \leq)$, então não se tem necessariamente que $f(b) \ll f(a)$ em $(Q, \leq')$.

183. Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ conjuntos parcialmente ordenados. Considere o produto cartesiano $P_1 \times P_2$.

(a) Mostre que a relação $\leq$ definida em $P_1 \times P_2$ por

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

é uma relação de ordem parcial. Esta relação de ordem parcial é conhecida por **ordem cartesiana** em $P_1 \times P_2$.

(b) Mostre que a relação $\leq$ definida em $P_1 \times P_2$ por

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} & x_1 <_1 x_2 \\ ou & x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \end{cases}$$

é uma relação de ordem parcial. Esta relação de ordem parcial é conhecida por **ordem lexicográfica** em $P_1 \times P_2$.

(c) Mostre que, em relação à ordem cartesiana, $P_1 \times P_2 \simeq P_2 \times P_1$.

(d) Considerando os c.p.o.'s $(P_1, \leq_1)$, com $P_1 = \{a, b\}$ e $\leq_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$, e $(P_2, \leq_2)$, com $P_2 = \{x, y, z\}$ e $\leq_2 = \{(x, x), (y, y), (z, z), (x, y), (x, z)\}$, mostre que a alínea anterior não é verdadeira, se considerarmos antes a ordem lexicográfica.

Resolução

(a) Para concluirmos que $\leq$ é uma ordem parcial em $P_1 \times P_2$ temos de provar que esta relação binária é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

- As relações binárias $\leq_1$ e $\leq_2$, porque são ordens parciais em $P_1$ e $P_2$, respetivamente, são relações reflexivas. Para $(x_1, y_1) \in P_1 \times P_2$, temos que $x_1 \in P_1$ e $y_1 \in P_2$ e, portanto, $x_1 \leq_1 x_1$ e $y_1 \leq_2 y_1$. Logo,
$$(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$$
e, portanto, $\leq$ é uma relação binária reflexiva;
- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$. Então,
$$x_1 \leq_1 x_2, \; y_1 \leq_2 y_2, \; x_2 \leq_1 x_1, \; y_2 \leq_2 y_1.$$
Das primeira e terceira condições e porque $\leq_1$ é antissimétrica, concluímos que $x_1 = x_2$. Das segunda e quarta condições, e porque $\leq_2$ é antissimétrica, concluímos que $y_1 = y_2$. Logo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ e, portanto, $\leq$ é uma relação binária antissimétrica;
- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$. Então,
$$x_1 \leq_1 x_2, \; y_1 \leq_2 y_2, \; x_2 \leq_1 x_3, \; y_2 \leq_2 y_3.$$
Das primeira e terceira condições e porque $\leq_1$ é transitiva, concluímos que $x_1 \leq_1 x_3$. Das segunda e quarta condições, e porque $\leq_2$ é transitiva, concluímos que $y_1 \leq_2 y_3$. Logo, $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$ e, portanto, $\leq$ é uma relação binária transitiva.

(b) Para concluirmos que $\leq$ é uma ordem parcial em $P_1 \times P_2$ temos de provar que esta relação binária é reflexiva, antissimétrica e transitiva:

- Para $(x_1, y_1) \in P_1 \times P_2$, temos que $x_1 \in P_1$ e $y_1 \in P_2$. Como $x_1 = x_1$ e, porque $\leq_2$ é reflexiva, $y_1 \leq_2 y_1$. Logo,
$$(x_1, y_1) \leq (x_1, y_1)$$
e, portanto, $\leq$ é uma relação binária reflexiva;

- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_1, y_1)$. Então,

  $$x_1 <_1 x_2, \text{ ou } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

  e

  $$x_2 <_1 x_1, \text{ ou } x_2 = x_1 \text{ e } y_2 \leq_2 y_1.$$

  De todos os casos gerados pela combinação destas condições, apenas podemos ter

  $$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \text{ e } y_2 \leq_2 y_1$$

  e, portanto, como $\leq_2$ é antissimétrica, podemos concluir que

  $$x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

  Logo, $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, o que nos permite concluir que $\leq$ é antissimétrica;
- Sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in P_1 \times P_2$ tais que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ e $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$. Então,

  $$x_1 <_1 x_2, \text{ ou } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2$$

  e

  $$x_2 <_1 x_3, \text{ ou } x_2 = x_3 \text{ e } y_2 \leq_2 y_3.$$

  Temos quatro situações a considerar:
  (1) $x_1 <_1 x_2$ e $x_2 <_2 x_3$: neste caso, como $\leq_1$ é transitiva e $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, temos que $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

  (2) $x_1 <_1 x_2$ e $x_2 = x_3$ e $y_2 \leq_2 y_3$: neste caso, temos que $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

  (3) $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq_2 y_2$ e $x_2 <_1 x_3$: neste caso, temos $x_1 <_1 x_3$ e, portanto $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

  (4) $x_1 = x_2$ e $y_1 \leq_2 y_2$ e $x_2 = x_3$ e $y_2 \leq_2 y_3$: neste caso, temos $x_1 = x_3$ e, como $\leq_2$ é transitiva, $y_1 \leq_2 y_3$ e, portanto, $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$;

  Em qualquer uma das quatro situações concluímos que $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$, o que nos permite concluir que $\leq$ é transitiva.

(c) Para provarmos que os c.p.o.'s $P_1 \times P_2$ e $P_2 \times P_1$ são isomorfos, basta provar que a aplicação $\varphi : P_1 \times P_2 \to P_2 \times P_1$, definida por $\varphi((x, y)) = (y, x)$, para todo $(x, y) \in P_1 \times P_2$, é um isomorfismo entre c.p.o.'s, ou seja, que é um mergulho isótono sobrejetivo, o que se verifica facilmente. De facto,

- $\varphi$ é obviamente sobrejetiva, uma vez que $D'_\varphi = P_2 \times P_1$;
- $\varphi$ é um mergulho isótono, uma vez que, para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in P_1 \times P_2$, se tem

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \leq_{P_1 \times P_2} (x_2, y_2) &\Leftrightarrow x_1 \leq_1 x_2 \text{ e } y_1 \leq_2 y_2 \\
&\Leftrightarrow y_1 \leq_2 y_2 \text{ e } x_1 \leq_1 x_2 \\
&\Leftrightarrow (y_1, x_1) \leq_{P_2 \times P_1} (y_2, x_2) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, y_1) \leq_{P_2 \times P_1} \varphi(x_2, y_2).
\end{aligned}$$

(d) Começamos por observar que

$$P_1 \times P_2 = \{(a,x),(a,y),(a,z),(b,x),(b,y),(b,z)\}$$

e

$$P_2 \times P_1 = \{(x,a),(y,a),(z,a),(x,b),(y,b),(z,b)\}.$$

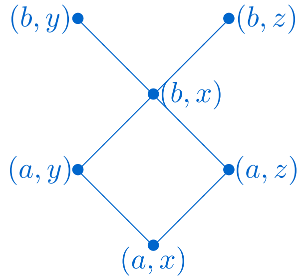
Considerando a ordem lexicográfica em $P_1 \times P_2$, obtemos

$$\leq_{P_1\times P_2} = \mathrm{id}_{\,P_1\times P_2} \cup \{((a,x),(b,x)),((a,x),(b,y)),((a,x),(b,z)),$$

$$((a,y),(b,x)),((a,y),(b,y)),((a,y),(b,z)),((a,z),(b,x)),((a,z),(b,y)),$$

$$((a,z),(b,z)),((a,x),(a,y)),((a,x),(a,z)),((b,x),(b,y)),((b,x),(b,z))\}$$

a que corresponde o diagrama de Hasse:



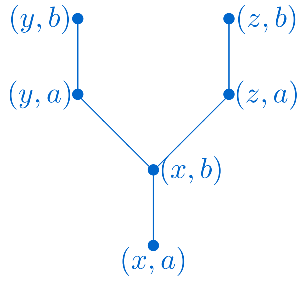

Considerando agora a ordem lexicográfica em $P_2 \times P_1$, obtemos

$$\leq_{P_2\times P_1} = \mathrm{id}_{\,P_2\times P_1} \cup \{((x,a),(y,a)),((x,a),(y,b)),((x,a),(z,a)),$$

$$((x,a),(z,b)),((x,a),(x,b)),((x,b),(y,a)),((x,b),(y,b)),((x,b),(z,a),$$

$$((x,b),(z,b),((y,a),(y,b)),((z,a),(z,b))\}$$

a que corresponde o diagrama de Hasse:




Pelos diagramas podemos concluir que os dois c.p.o.'s não são isomorfos (basta observar, por exemplo, que, no primeiro diagrama, o elemento mínimo é coberto por dois elementos distintos e, no segundo diagrama, o elemento mínimo é coberto por um único elemento).

## 8 cardinalidade

184. Em cada caso, diga, justificando, se os conjuntos indicados são equipotentes:

(a) $\{1, 2, 5, 8\}$ e $\{azul, verde, vermelho\}$;

Resolução

Os conjuntos não são equipotentes pois qualquer aplicação de $\{1, 2, 5, 8\}$ em $\{azul, verde, vermelho\}$ é não injetiva.

(b) $\{1, 2, 5, 7\}$ e $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$;

Resolução

Os conjuntos são equipotentes. A aplicação $f : \{1, 2, 5, 7\} \to \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ definida por $f(1) = \mathbb{N}$, $f(2) = \mathbb{Z}$, $f(5) = \mathbb{Q}$, $f(7) = \mathbb{R}$ é uma aplicação bijetiva.

(c) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_0$;

(d) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$;

(e) $2\mathbb{N}$ e $3\mathbb{Z}$;

(f) $]0, 1]$ e $[0, 1[$;

(g) $]0, 1]$ e $[0, 1]$;

(h) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $]a, b[$ e $\mathbb{R}$;

(i) $]0, 1[\cup\{2\}$ e $\mathbb{R}$;

(j) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

185. Sejam $A$, $B$, $C$ e $D$ conjuntos. Prove que:

(a) se $A \sim B$ então $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$;

(b) $A \times B \sim B \times A$;

(c) se $A \sim C$ e $B \sim D$ então $A \times B \sim C \times D$;

(d) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

186. Sejam $A$, $B$ e $C$ conjuntos. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

(a) se $A \sim B$ então $A \setminus B \sim B \setminus A$;

Resolução

A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Para $A = \mathbb{N}$ e $B = \mathbb{N}_0$, tem-se $A \sim B$ e $A \setminus B = \emptyset \not\sim \{0\} = B \setminus A$.

(b) se $A \setminus B \sim B \setminus A$ então $A \sim B$;

(c) se $A \sim B$ então $A \cup C \sim B \cup C$;

(d) se $A \sim B$ então $A \cap C \sim B \cap C$;

(e) se $A \sim B$ e $A \cap C = B \cap C = \emptyset$ então $A \cup C \sim B \cup C$;

Resolução

A afirmação é verdadeira. Se $A \sim B$, existe uma função bijetiva de $A$ em $B$. Seja $f : A \to B$ essa função. Considere-se a relação

$$g = \{(a, f(a)) : a \in A\} \cup \{(c, c) : c \in C\}.$$

Então, $g \subseteq (A \cup C) \times (B \cup C)$ é tal que

$$D_g = A \cup C$$

e, porque $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, para todos $x \in A \cup C$ e $y_1, y_2 \in B \cup C$,

$$(x, y_1), (x, y_2) \in g \Rightarrow y_1 = y_2$$

Logo, $g$ é uma função de $A \cup C$ em $B \cup C$. Mais ainda,

$$D'_g = B \cup C$$

e, para $x_1, x_2 \in A \cup C$ e $y \in B \cup C$,

$$(x_1, y), (x_2, y) \in g \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Assim, a função $g$ é bijetiva e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$.

(f) se $A \cap C \sim B \cap C$ e $C \neq \emptyset$ então $A \sim B$;

(g) Sejam $A, B$ e $C$ conjuntos. Se $A \cup C \sim B \cup C$ então $A \sim B$.

Resolução

A afirmação é falsa. Considere-se o seguinte contraexemplo: Se $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ e $C = \{1, 2, 3\}$, então, $A \cup C = \{1, 2, 3\} = B \cup C$ e, portanto, $A \cup C \sim B \cup C$ e, no entanto, $A \not\sim B$, já que são conjuntos finitos com diferentes cardinais.

187. Dê exemplos de conjuntos $A$, $B$, $C$ e $D$ tais que $A \sim C$ e $B \sim D$ mas

(a) $A \cup B \nsim C \cup D$;

(b) $A \cap B \nsim C \cap D$.

188. Sejam $A$, $A'$, $B$ e $B'$ conjuntos tais que $A \sim A'$, $B \sim B'$ e seja $f : A \to B$ é uma aplicação injetiva. Mostre que existe uma aplicação injetiva de $A'$ em $B'$.

189. Sejam $A$ e $B$ conjuntos finitos equipotentes e $g : A \to B$ uma aplicação. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

(a) $g$ é injetiva;

(b) $g$ é sobrejetiva;

(c) $g$ é bijetiva.

190. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Mostre que:

(a) Se $A$ é infinito e $A \subseteq B$, então $B$ é infinito;

Resolução

Como $A$ é infinito, sabemos que existe $X \subset A$ para o qual existe $f : X \to A$ bijetiva.

Sejam $Y = X \cup B \backslash A$ e $g : Y \to B$ a aplicação definida por

$$f(y) = \begin{cases} y & se\ y \in B \backslash A \\ f(y) & se\ y \in X \end{cases}$$

Então, $Y \subset B$ e $g$ é uma aplicação bijetiva: $g$ é sobrejetiva pois

$$\begin{aligned} y \in B \quad & \Leftrightarrow y \in B \backslash A \text{ } ou \text{ } y \in A \\ & \Rightarrow y \in B \backslash A \text{ } ou \text{ } \exists x \in X : y = f(x) \\ & \Leftrightarrow \exists x \in Y : y = g(x) \end{aligned}$$

e $g$ é injetiva, uma vez que

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) \quad & \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & se \ a, b \in B \backslash A \\ f(a) = f(b) & se \ a, b \in X \end{cases} \\ & \Rightarrow a = b, \end{aligned}$$

uma vez que $f$ é injetiva. Logo, como $B$ é equipotente a um seu subconjunto próprio, concluímos que $b$ é infinito.

(b) Se $B$ é finito e $A \subseteq B$, então $A$ é finito.

(c) se $A$ e $B$ são finitos, então $A \cup B$ é finito;

191. Mostre que um subconjunto infinito de um conjunto numerável é numerável.

192. Sejam $A$ e $B$ conjuntos. Prove que:

(a) se $A$ é finito e $B$ é numerável então $A \cup B$ é numerável;

Resolução

Se $A$ é finito então existe $n \in \mathbb{N}$ e existe $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$ bijetiva. Se $B$ é numerável então existe $g : \mathbb{N} \to B$ bijetiva. Seja $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \leq n \\ g(x - n) & \text{se } x > n \end{cases} .$$

Então, $h$ é obviamente bijetiva e, portanto, $\mathbb{N} \sim A \cup B$, i.e., $A \cup B$ é numerável.

(b) se $A$ é finito e $B$ é numerável então $B \setminus A$ é numerável;

(c) se $A$ e $B$ são numeráveis então $A \cup B$ é numerável.