1. (9 pontos) Seja X uma v.a. com f.d.p. $f(x) = \begin{cases} 2\,x\,e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

   (a) Calcule $P(1 < X < 2)$ e assinale esta probabilidade num esboço do gráfico de f.

   $P(1 < X < 2) = \int_1^2 2\,x\,e^{-x^2}\,dx = -e^{-x^2}\Big|_1^2 = e^{-1} - e^{-2^2} = 0.3496$; ver figura 1 com a probabilidade assinalada.

   (b) Deduza a f.d. F da v.a. X.

   Para $x < 0$ temos $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x 0\,dt = 0$; e para $x \geq 0$ temos

   $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = 0 + \int_0^x 2\,t\,e^{-t^2}dt = -e^{-t^2}\Big|_0^x = e^{-x^2}$. Logo $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

   (c) Prove que a correspondente f.d. inversa é $F^{-1}(y) = \sqrt{-\log(1-y)}$.

   Para obter a função inversa de F, resolve-se $y = F(x)$ em ordem a x $(x > 0)$:

   $y = F(x) \iff y = 1 - e^{-x^2} \iff e^{-x^2} = 1 - y \iff -x^2 = \log(1-y) \iff x = \sqrt{-\log(1-y)} = F^{-1}(y)$

   (d) Calcule os quartis de X e assinale-os de forma clara no gráfico da alínea (a).

   Os quartis $\chi_{i/4}$ $(i = 1, 2, 3)$ são a solução de $F(x) = \frac{i}{4}$, ou seja, são dados por $\chi_{i/4} = F^{-1}(\frac{i}{4})$. Pela alínea anterior, a solução é $\chi_{1/4} = 0.5364$ (1º quartil), $\chi_{2/4} = 0.8326$ (mediana), $\chi_{3/4} = 1.1774$ (3º quartil), conforme o código

   ```
   sqrt(-log(1-1:3/4))
     [1] 0.5363600 0.8325546 1.1774100
   ```

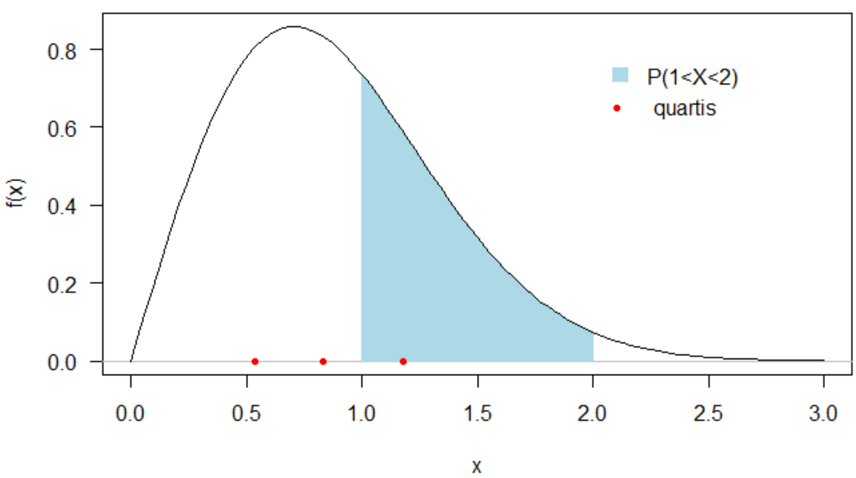

Figura 1: gráfico de f com probabilidade (área) assinalada e quartis (pontos vermelhos)

   (e) Enuncie o resultado que permite simular NPA com dada f.d. F e aplique-o a este caso.

   Resultado a aplicar: Se F é uma dada f.d. contínua, então

   $$U \frown U[0,1] \implies X = F^{-1}(U) \text{ tem f.d. } F\,.$$

   Para simular uma amostra de n valores da v.a. X do enunciado, simulamos dados u de NPA com distribuição $U[0,1]$ e calculamos $F^{-1}(u)$. Por exemplo, no caso $n = 100$, faremos

   ```
   sqrt(-log(1-runif(100)))
   ```

(f) Determine e identifique a distribuição de $Y = X^2$. Sugira novo processo para simular a v.a. X e exemplifique.

Calcula-se a f.d. G da v.a. $Y = X^2$ como segue (note-se que Y tem suporte $[0, +\infty[$). Para $y > 0$, temos $G(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - 0 = 1 - e^{-\sqrt{y}^2} = 1 - e^{-y}$. Logo, $Y \frown Exp(1)$. Então, podemos simular valores de X extraindo a raiz quadrada de valores simulados da distribuição $Exp(1)$. Por exemplo, para uma simulação de 100 dados da v.a. X, executamos

```
x <- sqrt(rexp(100,1))
```

2. (6 pontos) Considere n v.a., $X_1, \ldots, X_n$, mutuamente independentes, com distribuição uniforme no intervalo $[-1, 1]$. Seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Determine, explicando o raciocínio,

(a) a f.d.p. conjunta do par (X_1, X_2), e a partir daí, obtenha $P(X_1 + X_2 > 1)$

Como X_1 e X_2 são independentes, a f.d.p. conjunta é o produto das marginais; cada marginal é $U[-1, 1]$, com f.d.p. $f(x) = \frac{1}{2} I_{[-1,1]}(x)$. Logo a f.d.p. conjunta é $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

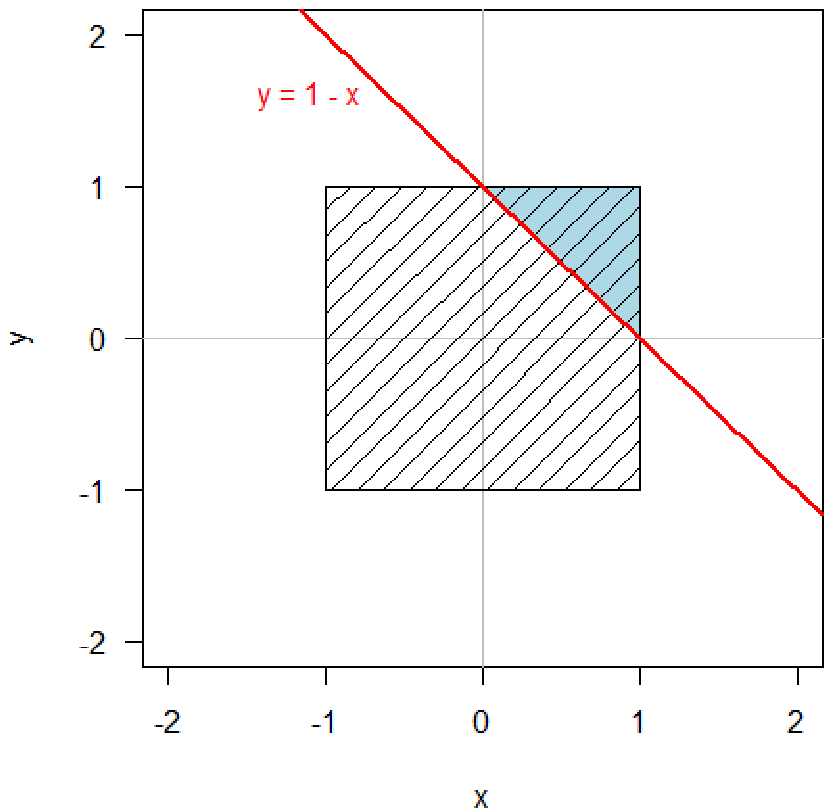

Figura 2: gráfico do quadrado Q (riscas), a recta $y = 1 - x$ e o domínio de integração T (azul)

Na figura 2 encontra-se assinalado a azul o triângulo $T = \{(x, y) : x + y > 1,\ x < 1,\ y < 1\}$, essencial para o cálculo de $P(X_1 + X_2 > 1)$. Como a f.d.p. é uniforme no quadrado $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$, a probabilidade pretendida é a fracção entre a área de T e a de Q, ou seja, $\frac{1}{8}$ (equivalentemente, é o volume do prisma que tem por base esse triângulo, cuja área é $\frac{1}{2}$, e que tem altura $\frac{1}{4}$, ou seja, é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$).

(b) o valor médio e a variância de S_n no caso $n = 75$

Temos $\mu = E(X_i) = 0$ e $\sigma^2 = \text{Var}(X_i) = \frac{(1+1)^2}{12} = \frac{1}{3}$, visto que $X_i \frown U[-1, 1]$. Ora o valor médio da soma de v.a. quaisquer é igual à soma dos valores médios dessas v.a. (desde que estes existam), logo $E(S_n) = n \times 0 = 0$. E como a variância da soma de v.a. independentes é igual à soma das respectivas variâncias (desde que estas existam), temos ainda $\text{Var}(S_n) = n \times \dfrac{1}{3} = 25$.

(c) um valor aproximado de $P(|S_n| > 1)$, no caso $n = 75$, usando o TLC

Uma vez que as v.a. X_i são simétricas, estamos em condições de aplicar o TLC com $n = 75$ (pois neste caso a condição $n > 30$ é suficiente para que a aproximação seja boa). Logo a f.d. da v.a. S_n é bem aproximada pela f.d. de $W \frown N(0, 5)$, donde $P(|S_n| > 1) \simeq P(|W| > 1) = 2 \times P(W < -1) = 0.8415$, que se obtém executando

```
2*pnorm(-1,0,5)
```

(d) um valor aproximado de $P(|S_n| > 1)$, no caso $n = 4$

Como este n é muito pequeno, não se aplica o TLC. A aproximação terá que ser obtida por simulação, com resultado aproximado por 0.401, conforme segue:

```
r <- 10^7
d <- matrix(runif(4*r,-1,1),nr=4)
somas <- colSums(d)
sum(abs(somas)>1)/r
  [1] 0.4008638
```

3. (5 pontos) Seja λ uma constante positiva. Considere uma v.a. X com f.d.p. $f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

(a) Deduza a transformada de Laplace de X.

(resolvido no Exemplo 1.1. do texto de apoio "Transformadas"e no slide nº6 de "4.5 Transformadas")

Temos $X \frown Exp(\lambda)$. A transformada de Laplace L existe na vizinhança da origem $]-\lambda, +\infty[$ visto que

$$L(t) = E(e^{-tX}) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(t+\lambda)x} dx = \frac{-\lambda}{\lambda + t}\, e^{-(\lambda+t)x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda + t},$$

se $t + \lambda > 0$, i.e., se $t > -\lambda$. Note-se que, se $t + \lambda < 0$, o integral não converge pois então $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-(\lambda+t)x} = +\infty$; e para $t + \lambda = 0$ também não pois nesse caso fica $L(t) = \int_0^{+\infty} \lambda\, dx = +\infty$.

(b) Calcule o valor médio de X à custa da transformada de Laplace.

Recorrendo à fórmula geral do momento de ordem n à custa da transformada de Laplace, $E(X^n) = (-1)^n L^{(n)}(0)$, temos em particular, para $n = 1$, $L'(t) = -\dfrac{\lambda}{(\lambda + t)^2}$, donde $E(X) = (-1)\, L'(0) = \dfrac{\lambda}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$.

(c) "Há duas distribuições discretas que estão relacionadas com esta v.a. X". Explique do que se trata.

(i) Uma das distribuições discretas em causa é a Poisson. De facto, esta distribuição e a $Exp(\lambda)$ encontram-se interligadas no processo de Poisson. Trata-se de um processo de chegadas ao longo do tempo t ($t > 0$) em que os intervalos de tempo até à 1ª chegada e entre chegadas consecutivas são v.a. i.i.d. $Exp(\lambda)$; neste processo, o nº de chegadas no intervalo $]0, t]$ tem distribuição $Poisson(\lambda t)$.

(ii) A outra distribuição discreta é a $Geom(p)$. A relação entre esta distribuição e a $Exp(\lambda)$ é que são as únicas (sendo a primeira discreta e a segunda contínua) que satisfazem à propriedade de "falta de memória", i.e., $P(X > x + y \,|\, X > y) = P(X > x)$, para $x > 0$, $y > 0$.