Universidade do Minho 2020/2021 Teste 1 (23.11.2020)

Probabilidades e Aplicações (CC+MAT, 3º ano) RESOLUÇÃO

---

1. (6 pontos) Considere a experiência aleatória de lançar um dado equilibrado (faces 1 a 6) até sair um ás (face 1).

O espaço de resultados é $\Omega = \{A_1, \overline{A}_1 A_2, \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 A_4, \ldots\}$, $A_i =$ "saída de ás no i-ésimo lançamento", $i \in \mathbb{N}$

Estes resultados têm probabilidades $P(\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{j-1} A_j) = (1-p)^{j-1}p$, para $j = 1, 2, \ldots$

A v.a. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ que representa "o nº de lançamentos necessários até sair um ás" tem suporte $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

e a sua distribuição chama-se geométrica com parâmetro(s) $p = \frac{1}{6}$

Sem recorrer a cálculos, mostre que $P(X > n) = q^n$, especificando o valor de q O acontecimento $\{X > n\}$, ou seja, "o primeiro ás ocorre depois do n-ésimo lançamento" é o mesmo que "nos primeiros n lançamentos não ocorrem ases" e a probabilidade deste acontecimento é $(1-p)^n$ porque os lançamentos são independentes; logo $q = 1 - p = \frac{5}{6}$

Então $P(X > 3) =$ $(\frac{5}{6})^3 = 0.5787$ e $P(X > 13 \mid X > 10) = (\frac{5}{6})^3$ (*resultado final*); comente Estas duas probabilidades são iguais porque esta distribuição "não tem memória", i.e. $P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$, $n, m \in \mathbb{N}$

2. (6 pontos) <u>Resolva no verso</u>. Em cada dia, uma acção da empresa E pode descer 1 €, manter-se, ou subir 1 €, com probabilidades 0.39, 0.2 e 0.41, respectivamente. Admita que as alterações diárias são mutuamente independentes.

   (a) Recorrendo ao TPT, calcule a probabilidade de ao fim de dois dias a cotação ser igual à inicial (*explique*).

   (b) Indique o código `R` para simular a variação da cotação ao fim de 20 dias.

   (c) Por meio de simulação, com $r = 10^5$ réplicas, estime (*inclua sempre o código que usou na resolução*)

      i. a probabilidade de que ao fim de 20 dias a acção tenha subido mais do que 5 €

      ii. graficamente a f.m.p. da v.a. que representa a "alteração da cotação ao fim de 20 dias". Comente.

3. (6 pontos) Considere um par aleatório (X, Y) com f.m.p. conjunta representada ao lado

$X \setminus Y$	**0**	**1**	**2**
−1	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	0
0	0	$\frac{2}{24}$	$\frac{6}{24}$
1	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	0

(i) Represente as f.m.p. marginais de X e de Y e identifique-as pelo nome usual.

$$X : \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

$X \frown U\{-1, 0, 1\}$ $\qquad$ $Y \frown bi(2, \frac{1}{2})$

(ii) X e Y são independentes? Justifique. Não, porque temos $P(X = 0, Y = 0) = 0$ e $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} \neq 0$, donde $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ falha pelo menos num caso

(iii) $E(XY) =$ $\sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{ij} = -1 \times 1 \times \frac{5}{24} + 1 \times 1 \times \frac{5}{24} = 0$

(iv) $\mathrm{Cov}(X, Y) =$ $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, porque $E(X) = \sum_i x_i\, p_{i\bullet} = -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0$

(v) Comente os resultados obtidos Como X e Y não são independentes e a correlação $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ é nula, conclui-se que "$\rho = 0 \;\not\Longrightarrow\;$ X e Y independentes", i.e., a recíproca da propriedade "X e Y independentes $\Longrightarrow \rho = 0$" é falsa

4. A população portuguesa reparte-se pelos grupos sanguíneos A, B, AB, O, nas percentagens 44%, 10%, 3%, 43% (resp.)

   (a) Qual a probabilidade de numa amostra (ao acaso) de 10 portugueses haver 5, 1, 0, 4 naqueles grupos (resp.)?

   $P(X_A = 5, X_B = 1, X_{AB} = 0) = 0.0710$, [`dmultinom(c(5,1,0,4), prob=c(.44,.10,.03,.43))`]

   (b) Discuta a questão da amostragem ser feita com ou sem reposição. É indiferente ser com ou sem reposição quando a dimensão da amostra ($n = 10$) é pequena comparada com a da população ($N > 10$ milhões). Este resultado deve-se à convergência do esquema hipergeométrico para o multinomial (demonstrada no caso univariado).