1. (11 pontos) Considere a fortuna de um jogador ao longo de n jogos mutuamente independentes, partindo de uma fortuna inicial $S_0 = 0$. O ganho em cada passo (jogo) é uma v.a. com f.m.p.

$$X : \begin{cases} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{cases}$$

Represente a fortuna do jogador ao fim de n passos por S_n, ou seja, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

(a) Determine a transformada de Laplace (TL) da v.a. X (*apresente a dedução*).

Como o suporte de X, $\{-1, 0, 1, 2\}$, é finito, então $E(e^{-tX})$ existe para qualquer $t \in \mathbb{R}$, donde a TL é $L(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{i=1}^{4} e^{-x_i t} p_i$, com $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, 1, 2)$ e $(p_1, p_2, p_3, p_4) = (\frac{3}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$. Então

$$L(t) = \frac{3}{6}\, e^{-(-1)t} + \frac{1}{6}\, e^{0} + \frac{1}{6}\, e^{-t} + \frac{1}{6}\, e^{-2t} = \frac{1}{6}\left(3\, e^{t} + 1 + e^{-t} + e^{-2t}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Calcule o valor médio (μ) e a variância (σ^2) de X à custa da TL (*mostre os cálculos*).

Os momentos $E(X^r)$ são dados à custa de L (TL de X) pela fórmula $E(X^r) = (-1)^r L^{(r)}(0)$. Ora

$$L'(t) = \frac{1}{6}\left(3\, e^{t} - e^{-t} - 2\, e^{-2t}\right) \qquad \text{e} \qquad L''(t) = \frac{1}{6}\left(3\, e^{t} + e^{-t} + 4\, e^{-2t}\right)$$

donde, para $r = 1$ e $r = 2$, temos

$$\mu = E(X) = -L'(0) = -\frac{1}{6}(3 - 1 - 2) = 0 \qquad \text{e} \qquad E(X^2) = L''(0) = \frac{1}{6}(3 + 1 + 4) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Logo $\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 = \frac{4}{3}$. Resumindo, $\mu = 0$ e $\sigma^2 = \frac{4}{3}$.

(c) Recorrendo ao Teorema Limite Central (TLC), calcule um valor aproximado para a probabilidade $p = P(-10 \leq S_{100} \leq 20)$, i.e., de ao fim de 100 passos a fortuna do jogador estar entre -10 e 20 (explique).

As v.a. $X_1, X_2, \ldots$ são i.i.d. com variância finita, pelo que pode aplicar-se o TLC. Como $n = 100$ é grande e a distribuição de X não é muito assimétrica (note-se que o coeficiente de assimetria é $\beta_1 = \frac{E(X^3)}{\sigma^{3/2}} = (\frac{3}{4})^{3/2} \simeq 0.65$), a aproximação pelo TLC é razoável. Ou seja, S_{100} tem distribuição aproximadamente $N(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \equiv N\left(0, \sqrt{\frac{4n}{3}}\right) \equiv N\left(0, \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$. Aplica-se a correcção de continuidade (de valor 0.5), porque S_{100} é discreta com suporte $[-100, 200] \cap \mathbb{Z}$. Então, sendo $Y \frown N\left(0, \frac{20}{\sqrt{3}}\right)$, temos

$$p = P(-10 \leq S_{100} \leq 20) \simeq P(-10.5 \leq Y \leq 20.5) = 0.7805$$

Este valor foi obtido com o código `pnorm(20.5,0,20/sqrt(3)) - pnorm(-10.5,0,20/sqrt(3))`

(d) Para que valor converge, em probabilidade, a fortuna média ($\frac{S_n}{n}$) ao fim de n passos (quando $n \to \infty$)? Justifique (invocando um resultado teórico).

Aplica-se a LGN (lei dos grandes números) que estabelece a seguinte convergência em probabilidade, para v.a. i.i.d. com X, desde que $\mu = E(X) < +\infty$: $\overline{X} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$. Como $\mu = 0$, temos $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0$.

2. (9 pontos) Seja $\{N_t\}_{t\geq 0}$ um processo de Poisson (PP) com intensidade $\lambda = 1$. Seja T_1 o instante da 1ª chegada e T_2 o intervalo de tempo entre a 1ª e a 2ª chegada.

(a) Escreva o código R da representação gráfica de uma trajectória deste PP até à 20ª chegada.

```
chegadas <- cumsum(rexp(20,1))
plot(c(0,chegadas), 0:20, type="s", xlab="t", ylab="N(t)")
```

(b) Usando propriedades relevantes das transformadas de Laplace (refira quais), prove que $T_1 + T_2$ não tem distribuição exponencial (não precisa deduzir a t. Laplace da lei $Exp(\lambda)$ que está no formulário).

Propriedades da TL a usar: (1) a TL da soma de v.a. independentes é o produto das respectivas TL

(2) a TL identifica a distribuição da v.a.

Como no PP as v.a. T_1 e T_2 são independentes, então por (1) temos $L_{T_1+T_2}(t) = L_{T_1}(t)L_{T_2}(t)$. E como T_1 e T_2 são ambas $Exp(1)$, cuja TL é $L(t) = \frac{1}{1+t}$ para $t > -1$, temos então

$$L_{T_1+T_2}(t) = L_{T_1}(t)L_{T_2}(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2, \ t > -1$$

Atendendo a que esta função não admite representação na forma $L(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}, t > -\lambda$ e à propriedade (2), conclui-se que $T_1 + T_2$ não tem distribuição exponencial. Tem-se aliás $T_1 + T_2 \frown Gama(2, 1)$.

(c) Estime $P(T_1 \leq 1,\ T_1 + T_2 > 1)$ por meio de simulação (*apresente o código* R *e o resultado numérico*)

```
r <- 1e6; t1 <- rexp(r,1); t2 <- rexp(r,1)
teste <- t1 <= 1 & t1 + t2 > 1
sum(teste)/r
 [1] 0.367334
```

Uma estimativa de $p = P(T_1 \leq 1,\ T_1 + T_2 > 1)$ é $\hat{p} = 0.367$. Nota: $p = e^{-1}$

(d) Executou-se no R:

```
r <- 10^6; t1 <- rexp(r,1); t2 <- rexp(r,1)
teste <- t1 <= 1 & t1 + t2 > 1
tps <- t1[teste]
hist(tps,freq=F)
```

Qual lhe parece ser a distribuição da v.a. subjacente ao vector (de dados simulados) `tps`?

Parece ser uma distribuição $U[0, 1]$.

Interprete essa v.a. relativamente ao "nº de chegadas até ao instante $t = 1$" e descubra o resultado teórico que lhe corresponde (a respeito do processo de Poisson).

O vector `tps` é constituído por simulações dos instantes T_1 da 1ª chegada (num PP de intensidade 1) restringidos ao acontecimento $\{T_1 \leq 1,\ T_1 + T_2 > 1\}$. Este acontecimento é o mesmo que $\{N_1 = 1\}$. Logo, o resultado teórico implícito é que "num PP de intensidade 1, a distribuição de T_1 (instante da 1ª chegada), condicional ao acontecimento $\{N_1 = 1\}$, é $U[0, 1]$". Por outras palavras, "sabendo que $\{N_1 = 1\}$, a distribuição *a posteriori* de T_1 é a $U[0, 1]$".