Universidade do Minho **Curso: LCC**
DMAT **Probabilidades e Aplicações** **2024/2025**
Teste II - B || 13 de dezembro 2024

Nome: **Nº**

Responda à questão 4 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do `R` *que utilizar. Duração*: 2h.

---

1. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua, com função densidade de probabilidade dada por
$$f(x) = \begin{cases} k & se \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{3} & se \quad 1 \le x \le 2 \\ 0 & se \quad c.c. \end{cases},$$
em que k é uma constante real.
   (a) Mostre que $k = \frac{2}{3}$.
   (b) Determine a função de distribuição de X, F_X.
   (c) Mostre que $E[X]$ e $Var[X]$ existem e que $E[X] = \frac{5}{6}$ e $Var[X] = \frac{11}{36}$.
   (d) Determine os quartis de X.
   (e) Seja Y uma v.a.r. tal que X e Y são independentes e $Y \sim Exp(1)$.
      i. Calcule $P(X \ge \frac{1}{4} \cup Y \ge 3)$.
      ii. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y)
      iii. Calcule $P(Y \le X | X < 1)$.
      iv. Determine $E[XY]$ e $Cov(X, Y)$.
   (f) Sejam $X_1, \ldots, X_{50}$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com X. Determine um valor aproximado de $P(S_{50} > 45)$, em que em que $S_{50} = \sum_{i=1}^{50} X_i$.

   Nota: Caso não consiga resolver (b), pode usar, se necessário, que $F_X(\frac{1}{4}) = \frac{1}{6}$ e que $F_X(1) = \frac{2}{3}$.

2. O Sr. A. trabalha como vendedor numa certa empresa e o montante de unidades vendidas por ele diariamente é uma v.a.r., A, que segue a lei $N(90, 81)$.
   (a) Assuma que o Sr. A. trabalha 6 dias por semana e que os montantes vendidos em dias distintos são quantidades independentes. Qual a probabilidade de, numa semana de trabalho, o Sr. A. vender menos de 90 unidades em pelo menos 2 dias e vender mais de 100 unidades em pelo menos 3 dias? Justifique.
   (b) Esta empresa tem um outro vendedor, o Sr. B., cujo montante diário de vendas é uma outra v.a.r. B. Sabe-se que $B \sim N(100, 100)$ e que as v.a.r.'s A e B são independentes.
      i. Considere a v.a.r. $D = B - 2A$. Determine $E[D]$, $Var[D]$ e identifique a lei de D.
      ii. Qual a probabilidade de, num dia, o Sr. B. vender pelo menos o dobro das unidades vendidas pelo Sr. A.? Justifique.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e seja F_{X_i} a função de distribuição de X_i, $i = 1, \ldots, n$.
   (a) Mostre que a função de distribuição da v.a.r. $N = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dada por
$$F_N(c) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(c)].$$
   (b) Assuma agora que $X_i \sim Exp(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, e identifique, neste caso, a lei da v.a.r. N. Justifique a resposta.

(v.s.f.f.)

Cotação: **1)** 10.5 [1.0 + 1.5 + 2.0 + 1.0 + 4.0 + 1.0] **2)** 4.5 [1.5 + 2.0 + 1.0] **3)** 2.0 **4)** 3.0

4. Seja $X \sim Poisson(\lambda)$.

   (a) Mostre que a Transformada de Laplace de X é dada por $L(t) = \exp\{-\lambda(1 - e^{-t})\}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Considere agora $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a lei $Poisson(\lambda)$. Determine a Transformada de Laplace de S_n e mostre que

   $$S_n \sim Poisson(n\lambda),$$

   em que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   (c) Determine, <u>usando a definição</u>, os quartis da lei $Poisson(1)$.

Nota: Pode usar o seguinte resultado: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.