Universidade do Minho **Curso: LCC**
DMAT **Probabilidades e Aplicações** **2023/2024**
Teste II - 6 de janeiro de 2024

Nome: **Nº**

Responda à questão 5 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e eventuais funções do R que usar. Duração: 2h30m.

1. Seja X a v.a.r. que representa a quantidade vendida diariamente, em kg, de um certo produto numa determinada empresa. Sabe-se que X é uma v.a.r. absolutamente contínua, que segue uma lei Uniforme e que:
   - a probabilidade de, num dia, se vender no máximo 4 kg do produto é igual a $\frac{1}{2}$.
   - a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos 5 kg deste produto é igual a $\frac{1}{4}$.

   (a) Mostre que $X \sim U([2,6])$.

   (b) Mostre, **usando a definição**, que $E[X]$ e $Var[X]$ existem e ainda que
   $$E[X]=4 \text{ e } Var[X]=\frac{4}{3}.$$

   (c) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas, haver exatamente um dia em que se vende mais de 5kg e de haver pelo menos 8 dias em que se vende menos de 4kg.

   (d) Considere agora uma v.a.r. Y e tal que X e Y são independentes e identicamente distribuídas. Calcule $P(Y \geq X)$.

2. Seja X uma v.a.r. absolutamente contínua, com função de distribuição dada por
   $$F(c) = \begin{cases} d & se \quad c < k \\ 1 - e^{-4(c-2)} & se \quad c \geq k \end{cases},$$
   com d e k constantes reais.

   (a) Mostre que $d = 0$ e $k = 2$.

   (b) Determine uma função densidade de probabilidade de X.

   (c) Considere a v.a.r. W definida por $W = 2X - 4$.

      i. Determine a função de distribuição de W e mostre que $W \sim Exp(2)$.

      ii. Suponha agora que a v.a.r. W representa o tempo, em horas, que um cliente espera para ser atendido numa repartição pública.

         A) Determine a probabilidade de um cliente esperar mais de 3 horas até ser atendido.

         B) Sabendo que um cliente já está à espera há mais 3 horas, qual a probabilidade de ele ter de esperar pelo menos mais 30 minutos para ser atendido? Justifique.

3. Considere duas v.a.r.'s, X e Y, independentes e tais que $X \sim N(1,4)$ e $Y \sim Poisson(2)$.

   (a) Identifique, justificando, a lei da v.a.r. $Z = \frac{X-1}{2}$ e determine $P(Z < -1)$.

   (b) Determine o valor médio e a variância da v.a.r. $T = 3X - 2Y$.

   (c) Assuma agora que a v.a.r. X representa o peso, em gramas (g), de um certo produto que é embalado em caixas de 10 unidades que, quando estão vazias, apresentam peso médio de 150g e desvio-padrão de 8g. Assuma que o peso da caixa vazia também segue uma lei Normal e que todos os pesos considerados são v.a.r.'s independentes. Qual a probabilidade de uma caixa cheia deste produto pesar mais de 180g?

(*v.s.f.f.*)

Cotação: **1) 5.5** [1.5 + 2 + 1 + 1]; **2) 6.0** [1.5 + 1.5 + 1 + 1 + 1]; **3) 4.5**; **4) 2.0**; **5) 2.0** [0.5 + 1.5]

4. Considere V_1 e V_2 duas v.a.r.'s independentes e identicamente distribuídas com a lei $Bernoulli(p)$, com $0 < p < 1$.

   (a) Determine, em função de p, o valor de $P(V_1 - V_2 \leq 0)$.

   (b) Determine, em função de p, a função de probabilidade conjunta do par aleatório (V_1, W), em que W é a v.a.r. dada por $W = V_1 V_2$. Diga, justificando, se V_1 e W são independentes.

5. Seja $L_X(t)$ a transformada de Laplace de uma qualquer v.a.r. X.

   (a) Considere agora a uma qualquer constante real. Mostre que a transformada de Laplace da v.a.r. $a\,X$ é dada por
   $$L_{aX}(t) = L_X(a\,t).$$

   (b) Considere agora n v.a.r's, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, independentes e tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \ldots, n$. Recorrendo às propriedades da Transformada de Laplace, mostre que, para quaisquer constantes reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não todas nulas, tem-se que
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i\, X_i \;\sim\; N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu_i \;,\; \sum_{i=1}^{n} a_i^2\, \sigma_i^2\right).$$

   Observação: Na alínea (b) pode usar, **sem demonstrar**, que a Transformada de Laplace da lei de probabilidade $N(\mu, \sigma^2)$ é dada por $L(t) = \exp\left\{-t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right\}$, $t \in \mathbb{R}$.