1. (10 pontos) Seja (X, Y) um par aleatório com a seguinte f.m.p. conjunta

$X \setminus Y$	**0**	**1**	**2**
0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

(a) Represente as f.m.p. marginais de X e de Y e identifique-as pelo nome usual.

$$X : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases} \qquad Y : \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$X \frown \; bi(2, \tfrac{1}{2}) \qquad Y \frown \; bi(2, \tfrac{1}{2})$$

(b) X e Y são independentes? Justifique.

Não são independentes. $P(X = 0, Y = 0) = 0$ e $P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} \neq 0$, donde a fórmula $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ falha pelo menos num caso, donde X e Y não são independentes.

(c) Calcule $E(XY)$ (*mostre os cálculos*)

$E(XY) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, p_{ij} = 1 \times 1 \times \frac{2}{8} + 1 \times 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

(d) Calcule $\mathrm{Cov}(X, Y)$ (*mostre os cálculos*)

$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$, porque $E(X) = E(Y) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$, uma vez que X e Y têm distribuição $bi(2, \frac{1}{2})$ e atendendo a que o valor médio de uma v.a. $bi(n, p)$ é np.

(e) No contexto de 3 lançamentos de uma moeda equilibrada, dê exemplo de um par aleatório (X, Y) que tenha esta lei de probabilidade conjunta ~~e explique a razão do sinal da correlação~~.

X = "número de caras nos dois primeiros lançamentos"

Y = "número de coroas nos dois últimos lançamentos"

De facto, temos o seguinte esquema para os 3 lançamentos, que levam à f.m.p. dada.

ω	X	Y
CCC	2	0
CCE	2	1
CEC	1	1
CEE	1	2
ECC	1	0
ECE	1	1
EEC	0	1
EEE	0	2

2. (10 pontos) Suponha que o peso (Kg) de um homem (adulto) escolhido ao acaso numa grande cidade é uma v.a. $Y \frown N(\mu, \sigma)$, $\mu = 75\ Kg$, $\sigma = 10\ Kg$. Considere uuma amostra aleatória de 9 homens dessa cidade.

(a) Calcule o valor médio e o desvio padrão do peso total dos 9 homens (*justifique*)

A soma dos pesos é a v.a. $S = Y_1 + \ldots + Y_9$, sendo $Y_1, \ldots, Y_9$ v.a. i.i.d. com $Y \frown N(75, 10)$.

O valor médio da soma de v.a. é a soma dos seus valores médios, donde $E(S) = 9 \times 75 = 765\,Kg$.

A variância da soma de v.a. independentes é a soma das variâncias das mesmas, logo $\mathrm{var}(S) = 9 \times 10^2$, donde decorre o desvio padrão da soma, $\sigma_S = \sqrt{\mathrm{var}(S)} = 30$

(b) Justifique a afirmação "a distribuição do peso total dos 9 homens é normal"

A soma de v.a. independentes $N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, \ldots, n$, tem distribuição normal com valor médio $\sum_i \mu_i$ e variância $\sum_i \sigma_i^2$. Como a amostra é aleatória (recolhida ao acaso, com reposição), os pesos são v.a. independentes, donde S tem distribuição normal (com valor médio e variância obtidos em (a)).

(c) Calcule a probabilidade de nessa amostra haver exactamente um homem leve e um pesado ("leve" significa que tem peso inferior a 60 Kg e "pesado" que tem peso acima de 95 Kg), recorrendo a um par aleatório discreto (*explique o raciocínio e identifique a lei de probabilidade desse par discreto; mostre a fórmula numérica para o cálculo da probabilidade ou o código* `R`)

Seja p_1 a probabilidade de um homem escolhido ao acaso na população ser leve, e p_2 a de ser pesado. Então p_1 e p_2 são dados por

```
p1 <- pnorm(60,75,10)
p2 <- pnorm(95,75,10,lower=F).
```

Seja X_1 o número de homens leves na amostra e X_2 o número de pesados. Então o par aleatório (X_1, X_2) tem distribuição multinomial, $M(9; p_1, p_2)$. Logo

$$P(X_1 = 1,\ X_2 = 1) = \frac{9!}{1!\ 1!\ 7!}\, p_1\, p_2\, (1 - p_1 - p_2)^7,$$

com resultado 0.05674, que pode ser calculado com o código

```
dmultinom(c(1,1,7), prob = c(p1,p2,1-p1-p2) )
```

pelo que a probabilidade pedida é 0.05674.

(d) (i) Qual o valor do peso, c, abaixo do qual estão 1% dos pesos dos homens da cidade? (ii) Que nome se dá usualmente a c? (iii) Qual a distribuição aproximada do "número de homens com peso abaixo de c", numa amostra aleatória de 200 homens dessa cidade? (*justifique*)

(i) Esse valor c é dado por `qnorm(0.01,75,10)`, com resultado $51.73652\,Kg$.

(ii) Os nomes usuais são: quantil de probabilidade 0.01, quantil-0.01, ou 1º percentil.

(iii) Seja X a v.a. que representa o nº de homens com peso abaixo de c numa amostra aleatória de $n = 200$ homens da cidade. Então $X \frown bi(200, 0.01)$. A aproximação da binomial à Poisson estabelece que se $X \frown bi(n, p)$, então $P(X = k)$, quando $n \to \infty$ e $p \to 0$, sendo $np = \lambda$ constante, converge para $P(W = k)$, sendo $W \frown Poisson(\lambda)$. Como $n = 200$ é grande e $p = 0.01$ é próximo de 0, conclui-se que a distribuição de X é aproximada pela lei $Poisson(np)$, ou seja, $Poisson(2)$.