Universidade do Minho | **Curso: LCC**
DMAT | **Probabilidades e Aplicações** | **2024/2025**
Teste I - A || 24 de outubro 2024

Nome: **Nº**

Responda à questão 4 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do `R` *que utilizar. Duração*: 2h.

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
   (a) Identifique, justificando, o espaço de probabilidade associado a esta experiência.
   (b) Identifique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) decorrentes da experiência. Na justificação, **identifique claramente o subconjunto** do espaço amostral a que corresponde cada um dos acontecimentos que indicou.
   (c) Sabendo que saiu pelo menos uma face par e que saiu pelo menos uma face ímpar, qual a probabilidade de ter saído ás no primeiro lançamento? Justifique.
   (d) Seja X a v.a.r. que representa o número de vezes que saiu uma face inferior ou igual a 2.
      i. Determine a função de probabilidade de X.
      ii. Determine a função de distribuição de X.

2. No país Maravilha distinguem-se três tipos de contribuintes que, dependendo do seus rendimentos, são classificados como sendo de uma e uma só de três classes, `Baixa`, `Média` ou `Alta`. Sabe-se que 10% dos contribuintes são de classe `Baixa` e que o número de contribuintes de classe `Média` é o dobro dos de classe `Alta`.
   Relativamente a acesso gratuito a cuidados de saúde, sabe-se que:
   - 10% dos contribuintes de classe `Alta` tem acesso gratuito a cuidados de saúde;
   - 20% dos contribuintes de classe `Média` tem acesso gratuito a cuidados de saúde;
   - todos os contribuintes de classe `Baixa` tem acesso gratuito a cuidados de saúde.

   Escolheu-se, ao acaso, um contribuinte deste país.
   a) Mostre que a probabilidade de ele ser de classe `Alta` é de 0.3.
   b) Mostre que a probabilidade de ele ter acesso gratuito a cuidados de saúde é de 0.25.
   c) Sabendo que o contribuinte tem acesso gratuito a cuidados de saúde, qual a probabilidade de ele não ser de classe `Alta`? Justifique.
   d) Sabendo que o contribuinte não tem acesso gratuito a cuidados de saúde, qual a probabilidade de ele ser de classe `Alta`? Justifique.

   Observação: Sempre que necessário, use os valores indicados em a) e b) na resolução das alíneas seguintes, mesmo que não tenha chegado a esses valores.

3. Um lote de 50 lâmpadas é inspeccionado recolhendo, ao acaso e com reposição, uma amostra de 10 lâmpadas e testando-as. Se o número de lâmpadas defeituosas encontradas na amostra for superior a 1, o lote é rejeitado; caso contrário o lote é aceite. Um determinado lote contendo 5 lâmpadas defeituosas é inspeccionado e seja X a v.a.r. que representa o número de lâmpadas defeituosas encontradas na amostra desse lote. Determine:
   (a) a função de probabilidade de X.
   (b) a probabilidade de esse lote ser rejeitado.

(*v.s.f.f.*)

Cotação: **1)** 7 [2.0 + 1.0 + 1.0 + 3.0] **2)** 7.5 [1.0 + 2.5 + 2.0 + 2.0] **3)** 2.5 [1.5 + 1.0] **4)** 3.0

4. Sejam Ω um conjunto e $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

   (a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se $\mathcal{C}$ é um π-sistema sobre Ω então $\mathcal{C}$ é uma σ-álgebra sobre Ω".

   (b) Sejam F e G dois elementos de $\mathcal{A}$, disjuntos e tais que $F \cup G \subsetneq \Omega$. Mostre que a função $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & se \quad \omega \notin (F \cup G) \\ 1 & se \quad \omega \in F \\ 2 & se \quad \omega \in G \end{cases},$$

   é uma v.a.r. e determine, em função de $P(F)$ e de $P(G)$, a função de distribuição de Z.

   (c) Sejam A e B dois elementos de $\mathcal{A}$, independentes e tais que $P(A) = P(B) = p$, em que $p \in]0, 1[$. Considere agora as v.a.r.'s $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definidas por

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & se \quad \omega \notin A \\ 1 & se \quad \omega \in A \end{cases} \quad \text{e} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & se \quad \omega \notin B \\ 1 & se \quad \omega \in B \end{cases}.$$

   Mostre que $X + Y \sim Bin(2, p)$. (Sug.: Determine a função de probabilidade da v.a.r. $X + Y$).