Teste I - Probabilidades e Aplicações

Universidade do Minho
Curso: LCC
DMAT 2023/2024

31 de outubro de 2023

Questão 1

Suponha que tem um dado equilibrado.

(a) Considere a experiência aleatória que consiste em efetuar um lançamento deste dado e seja $X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R}$ a v.a.r. definida por

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } \omega \leq 2 \\ 1 & \text{se } \omega > 2 \end{cases}$$

i. Determine a função de probabilidade e a função de distribuição.

Resolução: Em primeiro lugar, note-se que o espaço amostral em questão é finito e os acontecimentos elementares são equiprováveis, pois o dado é equilibrado. Deste modo, o espaço de probabilidade em questão é $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, onde $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e P é a medida de probabilidade de Laplace. Além disso, o contradomínio de X é $C_X = \{0, 1\}$.

A função de probabilidade $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ é então dada por

$$f(a) = \begin{cases} P_X(\{a\}) & \text{se } a \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
P_X(\{0\}) &= P(X^{-1}(0)) \\
&= P(\{1,2\}) \\
&= P(\{1\}) + P(\{2\}) \\
&= 2 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_X(\{1\}) &= P(X^{-1}(1)) \\
&= P(\{3,4,5,6\}) \\
&= P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) \\
&= 4 \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Consequentemente, tem-se que:

$$f(a) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } a = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a \notin \{0,1\} \end{cases}$$

A função de distribuição é então dada por:

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ f(0) & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ f(0) + f(1) & \text{se } c \geq 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$F_X(c) = \begin{cases} 0 & \text{se } c < 0 \\ \frac{1}{3} & \text{se } 0 \leq c < 1 \\ 1 & \text{se } c \geq 1 \end{cases}$$

ii. X tem uma lei de probabilidade discreta conhecida. Identifique-a.

Resolução: A v.a.r. X segue uma distribuição de Bernoulli com parâmetro $p = \frac{2}{3}$, i.e., $X \sim \textit{Bernoulli}\left(\frac{2}{3}\right)$, uma vez que $f(1) = \frac{2}{3}$, $f(0) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ e $f(a) = 0$ nos restantes casos.

(b) Considere agora a experiência aleatória que consiste em efetuar um lançamento deste dado seguido de dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.

i. Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória. Justifique.

Resolução: Em primeiro lugar, como o dado e a moeda são equilibrados, os acontecimentos elementares são equiprováveis e, por isso, a medida de probabilidade P será a medida de Laplace. Além disso, o espaço amostral é

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}, x_i = \{Ca, Co\}, i \in \{2,3\}\}.$$

Tratando-se de um conjunto finito, a σ-álgebra é $\mathcal{P}(\Omega)$. Portanto, o espaço de probabilidade é $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, onde Ω e P são os indicados acima.

ii. Indique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) decorrentes desta experiência. Na justificação, identifique claramente o subconjunto do espaço amostral a que corresponde cada um dos acontecimentos que indicou.

Resolução: Os acontecimentos $A =$ "no último lançamento sai cara" e $B =$ "no último lançamento sai coroa" são incompatíveis. Os subconjuntos de Ω correspondentes são:

$$A = \{(x_1, x_2, Ca) \mid x_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}, x_2 \in \{Ca, Co\}\}$$
$$B = \{(x_1, x_2, Co) \mid x_1 \in \{1,2,3,4,5,6\}, x_2 \in \{Ca, Co\}\}$$

Como $A \cap B = \emptyset$, os acontecimentos mencionados são, de facto, incompatíveis.

iii. Sabendo que saiu uma face ímpar e pelo menos uma cara, qual a probabilidade de ter saído a face 1 e exatamente uma coroa? Justifique.

Resolução: Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$$A = \text{"saiu uma face ímpar"}$$
$$B = \text{"saiu pelo menos uma cara"}$$
$$C = \text{"saiu a face 1"}$$
$$D = \text{"saiu exatamente uma coroa"}.$$

Pretendemos determinar $P(C \cap D \mid A \cap B)$. Ora,

$$P(C \cap D \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C \cap D)}{P(A \cap B)}.$$

Observe-se que

$A \cap B \cap C \cap D$: "saiu a face 1, uma cara e uma coroa"

Logo,

$$A \cap B \cap C \cap D = \{(1, Ca, Co), (1, Co, Ca)\}.$$

Como $\#\Omega = 6 \times 2 \times 2 = 24$ e $\#(A \cap B \cap C \cap D) = 2$, tem-se

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Além disso, $\#(A \cap B) = 3 \times 3 = 9$, pelo que

$$P(A \cap B) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

Conclui-se então que

$$P(C \cap D \mid A \cap B) = \frac{1/12}{3/8} = \frac{2}{9}.$$

iv. Diga, usando a definição, se os seguintes acontecimentos, E, F, e G, formam uma família de acontecimentos independentes:

E : "sai face 1 no lançamento do dado"

F : "ocorre cara no primeiro lançamento da moeda"

G : "ocorrem uma cara e uma coroa nos lançamentos da moeda".

Resolução: Os acontecimentos E, F e G constituem uma família de acontecimentos independentes se as seguintes condições se verificarem:

$$\begin{aligned} P(E \cap F) &= P(E)P(F) \\ P(E \cap G) &= P(E)P(G) \\ P(F \cap G) &= P(F)P(G) \\ P(E \cap F \cap G) &= P(E)P(F)P(G). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned}
P(E) &= \frac{\#E}{24} = \frac{2\times 2}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \\
P(F) &= \frac{\#F}{24} = \frac{6\times 2}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \\
P(G) &= \frac{\#G}{24} = \frac{6\times 2}{24} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
P(E\cap F) &= \frac{\#(E\cap F)}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = P(E)P(F) \\
P(E\cap G) &= \frac{\#(E\cap G)}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} = P(E)P(G) \\
P(F\cap G) &= \frac{\#(F\cap G)}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = P(F)P(G) \\
P(E\cap F\cap G) &= \frac{\#(E\cap F\cap G)}{24} = \frac{1}{24} = P(E)P(F)P(G).
\end{aligned}$$

Como todas as condições mencionadas inicialmente se verificam, concluímos que os acontecimentos E, F e G constituem, de facto, uma família de acontecimentos independentes.

Questão 2

Num lote de 10 espingardas existem 4 espingardas de boa precisão, 5 de precisão média e 1 de precisão ruim. As espingardas aparentam ser todas iguais, pelo que não é possível distingui-las a olho. No entanto, sabe-se que espingardas de boa precisão acertam no alvo com probabilidade 0.9, espingardas de precisão média acertam com probabilidade 0.8, e as de precisão ruim erram sempre o alvo.

(a) Escolheu-se, ao acaso, uma espingarda neste lote e efetuou-se um disparo.

i. Determine a probabilidade de se acertar no alvo.

Resolução: Considerem-se os seguintes acontecimentos:

$$\begin{aligned}
A &= \text{“o disparo acertou no alvo”}\\
B &= \text{“saiu uma espingarda de boa precisão”}\\
M &= \text{“saiu uma espingarda de precisão média”}\\
R &= \text{“saiu uma espingarda de precisão ruim”}.
\end{aligned}$$

Pretendemos determinar $P(A)$. Como $A = A \cap (B \cup M \cup R)$ e os acontecimentos B, M e R são incompatíveis, decorre que

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap M) + P(A \cap R)\\
&= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid M)P(M) + P(A \mid R)P(R)\\
&= 0.9 \times 0.4 + 0.8 \times 0.5 + 0 \times 0.1\\
&= 0.76
\end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de acertar no alvo é de 0.76.

ii. Sabendo que se acertou no alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda de precisão média? Justifique.

Resolução: Usando a notação da alínea anterior, pretende-se determinar $P(M \mid A)$. Ora,

$$\begin{aligned}
P(M \mid A) &= \frac{P(M \cap A)}{P(A)}\\
&= \frac{P(A \cap M)}{0.76}\\
&= \frac{P(A \mid M)P(M)}{0.76}\\
&= \frac{0.8 \times 0.5}{0.76}\\
&\approx 0.53
\end{aligned}$$

iii. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda de precisão ruim? Justifique.

Resolução: Pretende-se determinar $P(R \mid \overline{A})$. Ora,

$$\begin{aligned}
P(R \mid \overline{A}) &= \frac{P(R \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \\
&= \frac{P(R \cap \overline{A})}{1 - P(A)} \\
&= \frac{P(R) - P(R \cap A)}{0.24} \\
&= \frac{0.1 - 0}{0.24} \\
&\approx 0.42
\end{aligned}$$

iv. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda que não era de boa precisão? Justifique.

Resolução: Pretende-se determinar $P(\overline{B} \mid \overline{A})$. Ora,

$$\begin{aligned}
P(\overline{B} \mid \overline{A}) &= 1 - P(B \mid \overline{A}) \\
&= 1 - \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} \\
&= 1 - \frac{P(B) - P(A \cap B)}{0.24} \\
&= 1 - \frac{0.4 - P(A \mid B)P(B)}{0.24} \\
&= 1 - \frac{0.4 - 0.9 \times 0.4}{0.24} \\
&\approx 0.83
\end{aligned}$$

(b) Escolheram-se, ao acaso e com reposição, seis espingardas deste lote.

i. Determine a probabilidade de se escolherem pelo menos 5 espingardas de boa precisão.

Resolução: Seja X a v.a.r. que representa o número de espingardas de boa precisão entre as 6 escolhidas. Então X é uma v.a.r. discreta, de contradomínio $C_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e com função de probabilidade $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dada por

$$f(k) = \begin{cases} \binom{6}{k} \times 0.4^k \times 0.6^{6-k} & \text{se } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Consequentemente, a probabilidade de se escolherem pelo menos 5 espingardas de boa precisão é dada por

$$\begin{aligned}
F_X(\{5,6\}) &= f(5) + f(6) \\
&= \binom{6}{5} \times 0.4^5 \times 0.6^{6-5} + \binom{6}{6} \times 0.4^6 \times 0.6^{6-6} \\
&\approx 0.04.
\end{aligned}$$

ii. Sabendo que se escolheram algumas de boa precisão, qual a probabilidade de se ter escolhido no máximo 4 de boa precisão? Justifique.

Resolução: Assumindo que "escolheram-se algumas de boa precisão" significa "escolheram-se pelo menos 2 de boa precisão", queremos determinar $P(X \le 4 \mid X \ge 2)$. Ora,

$$\begin{aligned}
P(X \le 4 \mid X \ge 2) &= \frac{P(2 \le X \le 4)}{P(X \ge 2)} \\
&= \frac{P(X \in \{2,3,4\})}{P(X \in \{2,3,4,5,6\})} \\
&= \frac{f(2)+f(3)+f(4)}{f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)} \\
&= \frac{1-(f(0)+f(1)+f(5)+f(6))}{1-(f(0)+f(1))}
\end{aligned}$$

Já sabemos que $f(5) + f(6) \approx 0.04$ e tem-se

$$f(0) + f(1) = \binom{6}{0} \times 0.4^0 \times 0.6^{6-0} + \binom{6}{1} \times 0.4^1 \times 0.6^{6-1} \approx 0.23$$

Logo

$$P(X \le 4 \mid X \ge 2) = \frac{1 - 0.04 - 0.23}{1 - 0.23} \approx 0.95.$$

Questão 3

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

(a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se A, B, e C formam uma família de acontecimentos independentes, então A e $B \cup C$ também são independentes."

(b) Considere n acontecimentos, $E_1, \ldots, E_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Mostre que, se

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) > 0,$$

então

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = P(E_1)P(E_2 \mid E_1)P(E_3 \mid E_1 \cap E_2)\ldots P\left(E_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right).$$

(c) Considere $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de elementos de $\mathcal{A}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} P(F_n) = p.$$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n \cap F_n) = p.$$