Universidade do Minho **Curso: LCC**
DMAT **Probabilidades e Aplicações** **2023/2024**
Teste I - 31 de outubro 2023

Nome: **Nº**

Responda à questão 3 neste enunciado e responda às restantes questões na folha de teste. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e eventuais funções do **R** *que utilizar. Duração*: 2h.

1. Suponha que tem um dado equilibrado.
   (a) Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar um lançamento deste dado e seja $X : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R}$ a v.a.r. definida por
   $$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \omega \leq 2 \\ 1 & \text{se} \quad \omega > 2 \end{cases}.$$
      i. Determine a função de probabilidade e a função de distribuição.
      ii. X tem uma lei de probabilidade discreta conhecida. Identifique-a.

   (b) Considere agora a experiência aleatória que consiste em efectuar um lançamento deste dado seguido de dois lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada.
      i. Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória. Justifique.
      ii. Indique, justificando, dois acontecimentos incompatíveis (mas não impossíveis) decorrentes desta experiência. Na justificação, identifique claramente o subconjunto do espaço amostral a que corresponde cada um dos acontecimentos que indicou.
      iii. Sabendo que saiu uma face ímpar e pelo menos uma cara, qual a probabilidade de ter saído a face 1 e exatamente uma coroaa? Justifique.
      iv. Diga, usando a definição, se os seguintes acontecimentos, E, F e G, formam uma família de acontecimentos independentes:
      E: "sai face 1 no lançamento do dado",
      F: "ocorre cara no primeiro lançamento da moeda",
      G: "ocorrem uma cara e uma coroa nos lançamentos da moeda".

2. Num lote de 10 espingardas existem 4 espingardas de boa precisão, 5 de precisão média e 1 de precisão ruim. As espingardas aparentam ser todas iguais pelo que não é possível distinguir, a olho, as 10 espingardas. No entanto, sabe-se que espingardas de boa precisão acertam no alvo com probabilidade 0.9, espingardas de precisão média acertam no alvo com probabilidade 0.8 e as de precisão ruim erram sempre o alvo.

   (a) Escolheu-se, ao acaso, uma espingarda neste lote e efectuou-se um disparo.
      i. Determine a probabilidade de se acertar no alvo.
      ii. Sabendo que se acertou no alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda de média precisão? Justifique.
      iii. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda que precisão ruim? Justifique.
      iv. Sabendo que se errou o alvo, qual a probabilidade de ter sido escolhida uma espingarda que não era de boa precisão? Justifique.

   (b) Escolheram-se, ao acaso e com reposição, seis espingardas deste lote.
      i. Determine a probabilidade de se escolherem pelo menos 5 espingardas de boa precisão.
      ii. Sabendo que se escolheram algumas de boa precisão, qual a probabilidade de se ter escolhido no máximo 4 de boa precisão? Justifique.

(*v.s.f.f.*)

Cotação: **1)** a) 1.5; b) 7.5 [2.0 + 1.5 + 1.5 + 2.5]; **2)** a) 6.5 [2.0 + 1.5 + 1.5 + 1.5]; b)1.5 **3)** 3.0

3. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade.

(a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira: "Se A, B e C formam uma família de acontecimentos independentes então A e $B \cup C$ também são independentes."

(b) Considere n acontecimentos, $E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$ fixo. Mostre que, se $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right) > 0$, então

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} E_k\right) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \ldots P\left(E_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} E_k\right).$$

(c) Considere $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de elementos de $\mathcal{A}$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} P(G_n) = 1 \text{ e } \lim_{n\to\infty} P(F_n) = p.$$

Mostre que $\lim_{n\to\infty} P(G_n \cap F_n) = p$.