---

1. (12 pontos) Um teste de escolha múltipla tem 10 perguntas, cada uma com 5 opções à escolha, das quais apenas uma está certa. Alfa, que não entende nada da matéria, responde ao acaso a todas as perguntas. O espaço de resultados desta experiência aleatória (responder ao acaso a todas as perguntas do teste) é

$\Omega =$ $\{1, 2, 3, 4, 5\}^{10}$, considerando as 5 opções (de cada pergunta) numeradas de 1 a 5

e $\#\Omega =$ 5^{10}

Neste caso pode considerar-se o espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{A})$, com $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ porque

Ω tem um nº finito de elementos, o que implica que qualquer subconjunto de Ω é probabilizável.

e a probabilidade de qualquer $A \in \mathcal{A}$ é dada por $P(A) =$ $\dfrac{\#A}{\#\Omega}$

Qual a probabilidade de Alfa acertar pelo menos duas das 10 perguntas? (*explique e inclua a fórmula para o cálculo e o resultado final*)

Seja C o acontecimento "Alfa acerta pelo menos duas das 10 perguntas". Então $\overline{C}$ é o acontecimento "Alfa acerta 0 ou 1 das 10 perguntas". Designando por p_j a probabilidade de Alfa acertar j (e só j) das 10 perguntas, temos $p_0 = \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$ e $p_1 = 10\,\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^9$, donde

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10} - 10\,\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^9 = 0.6421904$$

O resultado pode obter-se também com o código `sum(dbinom(2:10,10,1/5))`

Beto estudou a matéria e está numa (e numa só) das 3 situações seguintes, para responder à 1ª pergunta:

(i) sabe a resposta à pergunta e nesse caso assinala a resposta certa com probabilidade 0.98;

(ii) sabe que a opção certa é uma de duas específicas e nesse caso assinala uma destas duas ao acaso;

(iii) não faz ideia nenhuma sobre a resposta e neste caso assinala ao acaso uma das 5 opções.

A probabilidade de Beto saber a resposta à 1ª pergunta é 0.35; e a de estar indeciso entre as tais duas opções (das quais sabe que uma delas é a certa) é 0.45. Calcule, explicando o raciocínio,

(a) a probabilidade de Beto acertar na 1ª pergunta do teste

Sejam B_1, B_2, B_3 os acontecimentos "Beto sabe a resposta", "Beto sabe que a resposta é uma de duas","Beto não faz ideia da resposta". Pelo enunciado, estes acontecimentos são mutuamente exclusivos e exaustivos, tais que $P(B_1) = 0.35$, $P(B_2) = 0.45$, $P(B_3) = 1 - 0.35 - 0.45 = 0.20$; sendo A o acontecimento "Beto acerta na pergunta", temos ainda $P(A|B_1) = 0.98$, $P(A|B_2) = \frac{1}{2}$, $P(A|B_3) = \frac{1}{5} = 0.2$, donde, pelo TPT, com a partição $\{B_1, B_2, B_3\}$, resulta

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3) = 0.98\times0.35+0.5\times0.45+0.2^2 = 0.608$$

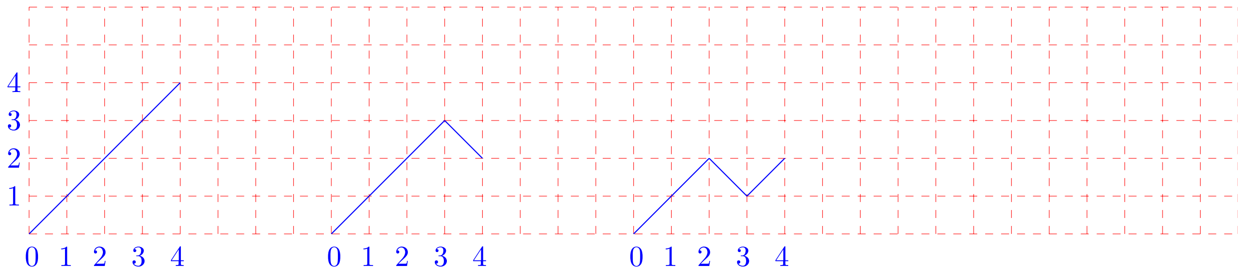
(b) a probabilidade de Beto saber a resposta à 1ª pergunta, dado que assinalou a resposta certa.

Pelo teorema de Bayes, temos então

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.98 \times 0.35}{0.608} = 0.5641447$$

2. (8 pontos) Em cada passo, um jogador, que parte de uma fortuna inicial nula, $S_0 = 0$, lança uma moeda (equilibrada) e ganha ou perde 1€ consoante sai cara ou coroa. Considere um jogo com n passos e represente as sucessivas fortunas (acumuladas) ao longo do jogo por $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

(a) No caso $n = 4$, esquematize as trajectórias em que "a fortuna é sempre positiva durante o jogo todo"; calcule então a probabilidade desse acontecimento (i.e., de $\{S_1 > 0\} \cap \{S_2 > 0\} \cap \{S_3 > 0\} \cap \{S_4 > 0\}$)



O número total de trajectórias em 4 passos é $2^4 = 16$, sendo estas equiprováveis porque a moeda é equilibrada. Como há apenas 3 trajectórias com "fortuna sempre positiva" (representadas acima), a probabilidade pedida é $\frac{3}{16} = 0.1875$

(b) Considere agora $n = 20$.

(i) Escreva o código R da simulação de um único jogo (fortuna do jogador ao longo dos n passos) e correspondente trajectória.

```
y <- cumsum(sample(c(-1,1),20,rep=T))
plot(y,type="o", ...)     # ou melhor:  plot(0:20, c(0,y), type="o", ...)
```

(ii) Estime, por meio de simulação, com $r = 10^5$ réplicas (para $n = 20$), a probabilidade p_j de ser j o número de passos (durante o jogo) em que o jogador tem fortuna positiva (*apresente o código* R*; preencha a tabela abaixo com as estimativas obtidas para* $j = 0, 1, 2, \frac{n}{2}, n-1, n$)

```
r <- 10^5; p <- 0
for (i in 1:r) p[i] <- sum( cumsum(sample(c(-1,1),20,rep=T)) > 0 )
table(p)/r
```

j	0	1	2	–	10	–	19	20
prob (estim)	0.17660	0.08714	0.04626	–	0.03080	–	0.04711	0.08776

Sem efectuar mais simulações, estime a probabilidade de que a fortuna do jogador seja

- sempre positiva durante o jogo todo (*explique o raciocínio*)

  Ter a fortuna "sempre positiva nos 20 passos" significa que o nº de passos com fortuna positiva é 20, pelo que pretendemos a estimativa de p_{20}, ou seja, 0.08776

- sempre não negativa durante o jogo todo (*explique o raciocínio*)

  Os acontecimentos "fortuna sempre não negativa" e "fortuna sempre não positiva" têm a mesma probabilidade, porque a moeda é equilibrada. A estimativa de "fortuna sempre não positiva" é a estimativa de p_0 (o nº de passos com fortuna positiva é zero). Logo a estimativa pretendida é 0.17660