Universidade do Minho 2021/2022 Exame de Recurso

Probabilidades e Aplicações (LCC, 3º ano) 07.02.2022 às 11:00

Duração: 120 *min*

Nome: .... Nº: ....

---

1. (6 pontos) Um teste de escolha múltipla é constituído por 10 perguntas, cada uma com 4 respostas à escolha (numeradas de 1 a 4), das quais apenas uma está certa. Considere a experiência aleatória que consiste em responder ao acaso a todas as perguntas. Represente o espaço amostral corrrespondente

$$\Omega =$$

Qual é a lei de probabilidade da v.a. X que representa o nº de respostas certas? ....

A probabilidade de acertar pelo menos 4 respostas é ....(*resultado numérico*)

Cada resposta certa vale 2 pontos e cada errada desconta 0.3 pontos. Calcule o valor médio e a variância

(i) da pontuação numa pergunta

(ii) da pontuação total no teste

Calcule a probabilidade de obter pelo menos 8 pontos no teste

2. (6 pontos) As máquinas A, B e C produzem respectivamente 25%, 35% e 40% das peças numa certa fábrica. As v.a. que representam o nº de defeitos de cada peça são mutuamente independentes, tendo distribuição $Poisson(0.02)$, $Poisson(0.03)$ ou $Poisson(0.05)$, conforme sejam fabricadas pela máquina A, B ou C.

(a) Escolheu-se ao acaso uma peça produzida na fábrica e verificou-se que tinha defeitos (i.e., pelo menos um defeito). Qual a probabilidade *a posteriori* de ter sido produzida pela máquina B? (*justifique*)

(b) De um lote de 10 peças escolhidas ao acaso na produção, calcule a probabilidade do acontecimento "duas terem sido produzidas por A, quatro por B e quatro por C". (*explique a resolução*)

(c) Qual a distribuição do nº total de defeitos em 10 peças escolhidas ao acaso, das quais duas foram produzidas por A, quatro por B e quatro por C? Justifique recorrendo a transformadas de Laplace.

3. (5 pontos) Sejam $X_1, \ldots, X_{75}$ v.a. i.i.d. com $X \frown U[-1, 1]$. Responda às seguintes questões, justificando:

(a) Calcule $P(0 < X_1 < 0.2 \mid X_2 > 0.2)$

(b) Calcule um valor aproximado de $P(1 \leq X_1 + \ldots + X_{75} \leq 3)$, usando um teorema conhecido (diga qual)

(c) Calcule $P(X_1^2 + X_2^2 > 1)$

4. (3 pontos) Seja X uma v.a. com função de distribuição (f.d.) $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$, $x \geq 1$.

(i) Calcule a f.d. inversa, F^{-1}. A partir daí, simule uma amostra aleatória de 100 valores de X (mostre o código `R`). Refira o resultado que está na base deste método de simulação.

(ii) Discuta, justificando, os processos viáveis para calcular uma aproximação de $P(X_1 + \ldots + X_{100} > 200)$, sendo $X_1, \ldots, X_{100}$ variáveis aleatórias i.i.d. com X.