Universidade do Minho | LCC e LMAT
Dep. Matemática | 2022/2023

Autómatos e Linguagens Formais

Mini-teste — 13 de abril de 2023 — duração: 90 minutos

Nome: ____________________ Número: __________

Cada uma das questões deve ser respondida no espaço disponibilizado a seguir à questão. ***Apenas deve ser justificada a resposta à última questão (Questão 6).***

Resolução

1. Considere o alfabeto $A = \{0, 1\}$ e a linguagem $L = \{\epsilon, 01, 10\}$.

   (a) Determine: i) L^1; ii) L^2; iii) $L^1 \cup L^2$.

   Resposta:
   i) $L^1 = L$.
   ii) $L^2 = \{\epsilon, 01, 10, 0101, 0110, 1001, 1010\}$.
   iii) $L^1 \cup L^2 = L^2$.

   (b) Dê exemplo de uma linguagem L_0 sobre o alfabeto A tal que $L \subset L_0$ (inclusão estrita) e $L^* = L_0^*$.

   Resposta: Por exemplo, $L_0 = L^2$.

2. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e a linguagem L definida indutivamente por:

$$1.\ a \in L \quad 2.\ x \in L \Rightarrow bx \in L \quad 3.\ x \in L \Rightarrow xa \in L$$

   (a) Determine $L_0 = \{u \in A^* : |u| = 3 \wedge u \in L\}$.

   Resposta: $L_0 = \{aaa, baa, bba\}$.

   (b) Apresente uma caracterização não indutiva da linguagem L.

   Resposta: Por exemplo, $L = \{b^m a^n : m \in \mathbb{N}_0 \wedge n \in \mathbb{N}\}$.

3. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$.

   (a) Seja $L = \mathcal{L}(b^*(ab)^*a^*)$. Dê exemplo de uma palavra $u \in A^*$ tal que $u \notin L$ e todas as palavras sobre A de comprimento inferior a u pertençam a L.

   Resposta: Por exemplo, $u = abb$.

   (b) Indique uma expressão regular r sobre A tal que

$$\mathcal{L}(r) = \{(ab)^k a^m : k \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \mathbb{N}\} \cup \{ubb^n : u \in A^* \wedge n \in \mathbb{N}_0\}.$$

   Resposta: Por exemplo, $(ab)^*aa^* + (a + b)^*bb^*$.

   (c) Indique duas soluções distintas (sobre o alfabeto A) da equação linear à direita

$$X = (b + \epsilon)X + a + b + \epsilon$$

   Resposta: Por exemplo, $(b + \epsilon)^*(a + b + \epsilon)$ e $(a + b)^*$.

4. Considere o autómato $\mathcal{A} = (\{1,2,3\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{1,3\})$, cuja função transição δ é dada pela tabela:

δ	1	2	3
a	$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
b	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

(a) Indique todos os caminhos com origem 1 e etiqueta bba.

Resposta: Há dois caminhos: i) $1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 1$; ii) $1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 1 \xrightarrow{a} 3$.

(b) Indique se cada uma das duas seguintes afirmações é ou não verdadeira.

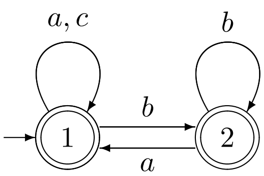
i) $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \delta(1, b^{2n}a) = \{1\}$. Resposta: Falsa.

ii) $\forall n \in \mathbb{N} \,.\, \delta(2, b^{2n}a) = \{2\}$. Resposta: Verdadeira.

(c) Indique qual é a linguagem reconhecida por $\mathcal{A}$.

Resposta: $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a,b\}^* : |u|_b \text{ é par}\}$.

5. Considere o alfabeto $A = \{a,b,c\}$. Desenhe (graficamente) um autómato, com não mais de três estados, que reconheça a linguagem das palavras sobre A que não têm bc como fator.



6. Sejam L, L_1, L_2 linguagens sobre um alfabeto A tais que $\epsilon \notin L_1$ e $L = (L_1 L) \cup L_2$. Mostre que:

$$\text{i)} \quad \forall u \in L, \exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, u \in L_1^k L_2 \,.$$

Com base nesta observação, mostre ainda que:

$$\text{ii)} \quad \forall r,s,t \in ER(A) \,.\, \epsilon \notin \mathcal{L}(r) \,\wedge\, t = rt + s \implies t \leq r^* s \,.$$

Resposta:

i) Por indução em $|u|$, provaremos: $u \in L \implies \exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, u \in L_1^k L_2$ (para todo $u \in A^*$).

Seja $u \in L$. Da hipótese $L = (L_1 L) \cup L_2$, segue $u \in L_1 L$ ou $u \in L_2$.

Caso $u \in L_2$. Como $u = \epsilon u$, tem-se $u \in \{\epsilon\} L_2 = L_1^0 L_2$ e consequentemente: $\exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, u \in L_1^k L_2$.

Caso $u \in L_1 L$. Então, $u = u_1 v$, com $u_1 \in L_1$ e $v \in L$. Como $u_1 \in L_1$ e $\epsilon \notin L_1$ (por hipótese), $u_1 \neq \epsilon$. Daqui, dado que $u = u_1 v$, $|v| < |u|$. Assim, há hipótese de indução relativa a v e, desta hipótese de indução e de $v \in L$, segue que existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $v \in L_1^j L_2$. Logo, como $u = u_1 v$ e $u_1 \in L_1$, tem-se $u \in L_1^{j+1} L_2$ e consequentemente: $\exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, u \in L_1^k L_2$.

ii) Sejam $r,s,t \in ER(A)$ e suponhamos que $\epsilon \notin \mathcal{L}(r)$ e $t = rt + s$.

Pretende-se mostrar $t \leq r^* s$, ou seja, $\mathcal{L}(t) \subseteq \mathcal{L}(r^* s)$.

Da hipótese $t = rt + s$, segue $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(r)\mathcal{L}(t) \cup \mathcal{L}(s)$. Assim, da hipótese $\epsilon \notin \mathcal{L}(r)$ e de i), segue:

$$\forall u \in \mathcal{L}(t), \exists k \in \mathbb{N}_0 \,.\, u \in \mathcal{L}(r)^k \mathcal{L}(s).$$

Logo, para todo $u \in \mathcal{L}(t)$, tem-se $u \in \mathcal{L}(r)^* \mathcal{L}(s) = \mathcal{L}(r^* s)$, e consequentemente: $\mathcal{L}(t) \subseteq \mathcal{L}(r^* s)$.

Cotações	1	2	3	4	5	6
	3,25	3,25	5	5	1,5	2