AUTÓMATOS E LINGUAGENS FORMAIS

Lic. Ciências da Computação
Lic. Matemática

Exercícios - Autómatos finitos

---

1. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{2\})$ onde δ é a função definida pela tabela abaixo.

δ	1	2
a	$\{2\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$

   a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
   b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
   c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.

2. Considere o autómato $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, i, F)$ onde $Q = \{1,2,3,4\}$, $A = \{a,b\}$, $i = 1$, $F = \{4\}$ e o conjunto de transições é definido pela função de transição δ definida pela tabela seguinte:

δ	1	2	3	4
a	$\{1,2\}$	$\{4\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{1,3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$	$\{4\}$

   (a) Represente o autómato $\mathcal{A}$ através de um grafo.
   (b) Dê exemplos de palavras aceites por $\mathcal{A}$ e de palavras rejeitadas por $\mathcal{A}$.
   (c) Descreva a linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$.
   (d) Classifique o autómato.

3. Seja L a linguagem sobre o alfabeto $\{a,b\}$ constituída pelas palavras que não têm aaa como prefixo.

   (a) Mostre que L é uma linguagem reconhecível.
   (b) Para cada uma das expressões regulares seguintes, diga, justificando, se a expressão representa L ou não:

      i. $b^*ab^*ab^+(a+b)^*$;
      ii. $(\varepsilon + a + a^2)(\varepsilon + b)(a+b)^*$;
      iii. $\varepsilon + a + a^2 + (b + ab + a^2b)(a+b)^*$;
      iv. $(b + ab + a^2b)^*$.

4. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.
   (a) Indique um autómato finito que reconheça o conjunto de todas as palavras sobre A que verificam:
   i. ab é um fator; ii. ab não é fator; iii. existe uma única ocorrência de ab.
   (b) Identifique a tabela das transições de cada um dos autómatos que desenhou.
   (c) Classifique os autómatos que desenhou.
   (d) Para cada linguagem da alínea anterior, indique uma expressão regular que a represente.

5. Considere o autómato finito $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3, 4\}, \{a, b\}, \delta, 1, \{3\})$ em que a função de transição δ é definida pela tabela abaixo.

δ	1	2	3	4
a	$\{4\}$	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$

De entre as seguintes opções escolha a que completa a frase corretamente:

A linguagem reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$ é __________.

(i) $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^*b(ab+b)^*a)$ (ii) $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a, b\}^* : aa$ ou bb são fatores de u$\}$

(iii) $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L}((a^+b)^* + (b^+a)(ba)^*)$ (iv) $L(\mathcal{A}) = \{u \in \{a, b\}^* : ba$ é fator de $u\}$

6. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.
   (a) $\{a^m b^{2m} \mid m \in \mathbb{N}\}$. (b) $\{w^2 \mid w \in A^*\}$.
   (c) $\{w \in A^* \mid w^I = w\}$. (d) $\{a^p \mid p \in \mathbb{N}$ e p é primo$\}$.
   (e) $\{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ em que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva.

7. Use o Lema da Iteração para provar que não são reconhecíveis as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.
   (a) $\{a^n b^2 c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (b) $\{a^i b^j c^k \mid j = i + k \ \wedge \ i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$.

8. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : m \geq n \geq 0\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, e $u = a^n b^n$ uma palavra de L. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Então $|u| \geq n$, $u = xyz$ com $z = a^{n-i-j} b^n$. Se $k = 2$, então $xy^k z = a^{n+j} b^n$ pelo que $xy^k z$ não é uma palavra de L.

   De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

   (i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.
   (ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.
   (iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.
   (iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, $xy^k z$ não fosse uma palavra de L.

9. Considere-se $A = \{a, b\}$ e $L = \{a^n b^m : 0 \leq n \leq m\}$. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $m = 2n$, e $u = a^n b^{2n}$. Qualquer que seja o prefixo xy de u tal que $|xy| \leq n$ e $y \neq \varepsilon$, tem-se que $x = a^i$, $y = a^j$ com $i + j \leq n$, $i \geq 0$ e $j \geq 1$. Se $z = a^{n-i-j} b^{2n}$, vem que $u = xyz$. Então, existem inteiros não negativos k tais que

$$xy^k z = a^i a^{kj} a^{n-i-j} b^{2n} = a^{n+(k-1)j} b^{2n}$$

e $n + (k-1)j \leq m = 2n$. Em tais casos $xy^k z \in L$.

De entre as afirmações abaixo diga qual é a afirmação verdadeira.

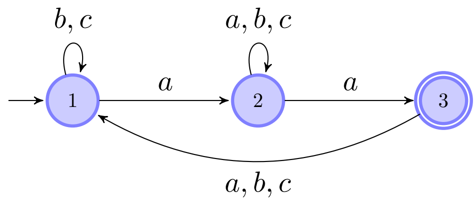
(i) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada não permite concluir que a linguagem L não é regular.

(ii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L é uma linguagem regular.

(iii) Com base no Lema da Iteração, a argumentação apresentada prova que L não é uma linguagem regular.

(iv) Com base no Lema da Iteração, só poderíamos concluir que L não é uma linguagem regular se, para qualquer $k \geq 0$, $xy^k z$ não fosse uma palavra de L.

10. Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado abaixo. por



(a) Mostre que *acba* é uma palavra aceite por $\mathcal{A}$ e que *acbab* é uma palavra rejeitada por este autómato.

(b) Escreva a tabela da função de transição δ do autómato $\mathcal{A}$.

(c) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$.

(d) Classifique $\mathcal{A}$.

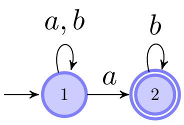
11. Prove que é reconhecível a linguagem sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ formada por todas as palavras que se caraterizam por:

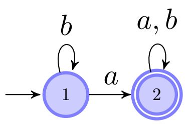
(a) ter um número par de ocorrências de a;

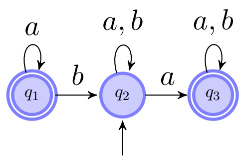
(b) ter comprimento par;

(c) ter pelo menos uma ocorrência de a e toda a ocorrência de b é seguida de uma ocorrência de c.

12. Considere os seguintes autómatos de alfabeto $\{a, b\}$.

$\mathcal{A} =$ 

$\mathcal{B} =$ 

$\mathcal{C} =$ 

(a) Escreva a tabela da função de transição de cada um dos autómatos.

(b) Classifique cada um dos autómatos quanto à completude, acessibilidade, co-acessibilidade e determinismo.

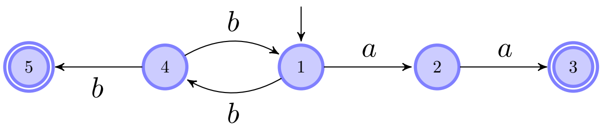
(c) Verifique que os três autómatos são equivalentes.

13. Modele, através de um autómato finito, o funcionamento de uma máquina de venda de café. Suponha que a máquina apenas aceita moedas de 5, 10, e 20 cêntimos e que o café custa 30 cêntimos. Quando o valor das moedas depositadas atinge ou excede os 30 cêntimos a máquina fornece um café, mas não devolve troco nem o guarda para uma próxima compra.

14. Para cada uma das linguagens dos exercícios 4 e 11, indique um autómato determinista, acessível e completo que a reconheça.

15. Determine um autómato determinista, acessível e completo equivalente ao autómato do exercício 10.

16. Considere o autómato $\mathcal{A}$ representado pelo seguinte grafo.

$\mathcal{A} =$ 

(a) Descreva a linguagem $L(\mathcal{A})$.

(b) Determine um autómato determinista, completo e acessível equivalente a $\mathcal{A}$.

(c) Determine um autómato determinista, acessível e co-acessível equivalente a $\mathcal{A}$.

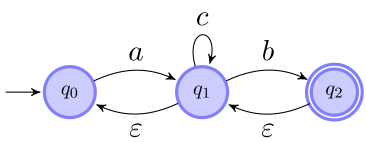
17. Sejam $A = \{a, b\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Recorde que, dados $x, y \in \mathbb{N}_0$, diz-se que x é congruente com y módulo m, e escreve-se $x \equiv_m y$, se x e y têm o mesmo resto na divisão inteira por m (ou seja, se $x - y$ é um múltiplo de m).

(a) Mostre que a linguagem $L = \left\{u \in A^* \mid \quad |u|_a = |u|_b\right\}$ não é reconhecível.

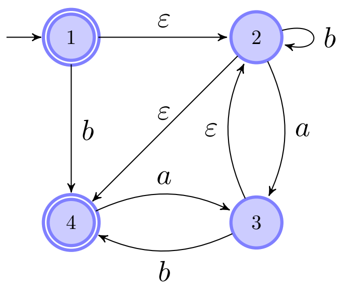
(b) Mostre que a linguagem $L_m = \left\{u \in A^* \mid \quad |u|_a \equiv_m |u|_b\right\}$ é reconhecível.

18. Determine autómatos síncronos equivalentes a cada um dos seguintes autómatos assíncronos.

(a)



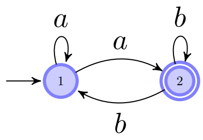
(b)

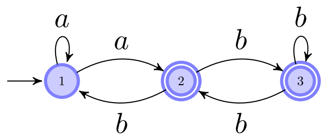


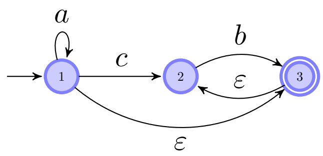
19. Determine autómatos assíncronos que reconheçam as seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b\}$.

(a) $bab + a^*b + (ab)^*b^*$. (b) $(bab + a^*b + (ab)^*b^*)^*$. (c) $a(bab + a^*b + (ab)^*b^*)^*(a + b)^*$.

20. Considere os seguintes autómatos.

$\mathcal{A} =$ 

$\mathcal{B} =$ 

$\mathcal{C} =$ 

Em cada caso,

(a) indique o sistema de equações lineares que lhe está associado; (sugestão para o autómato $\mathcal{C}$: adaptar o sistema associado fazendo $s_j = \varepsilon$ se $\text{fecho}_\varepsilon(j) \cap F \neq \emptyset$, e fazendo $s_j = \emptyset$ caso contrário)

(b) resolva o sistema e determine uma expressão regular que represente a linguagem reconhecida pelo autómato.

21. Recorrendo à elaboração de autómatos e usando sistemas de equações lineares, determine uma expressão regular que represente cada uma das seguintes linguagens sobre o alfabeto $A = \{a, b, c\}$.

(a) $L_1 = \{u \in A^* : |u|_b \leq 1\}$.

(b) $L_2 = \{u \in A^* : |u|_a \text{ é par}\}$.

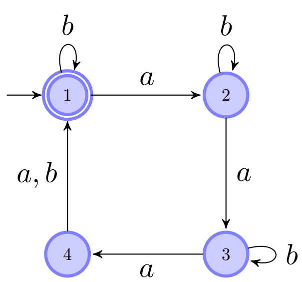
(c) $L_3 = \{u \in A^* : u \text{ tem uma e uma só ocorrência do factor } ab\}$.

22. Sejam $A = \{a, b\}$ um alfabeto e $L = A^*(ab)^+$.

(a) Determine todos os resíduos da linguagem L.

(b) Deduza que L é reconhecível.

23. Considere o alfabeto $A = \{a, b\}$ e o autómato $\mathcal{A}$ descrito na figura abaixo.

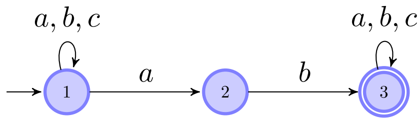


(a) Determine $L(\mathcal{A})$, utilizando o método das equações lineares.

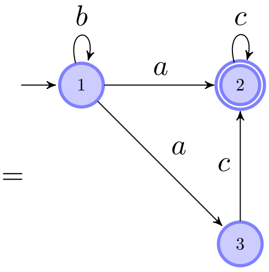
(b) Determine o autómato minimal equivalente ao autómato dado.

24. Considere os autómatos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ representados respetivamente por

$\mathcal{A}_1 =$



$\mathcal{A}_2 =$



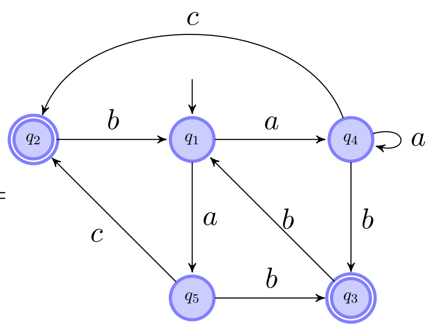
e para cada um destes autómatos:

(a) Calcule um autómato determinista completo e acessível que lhe seja equivalente.

(b) Determine o autómato minimal que lhe é equivalente.

25. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e o autómato $\mathcal{A}$ descrito na figura abaixo.

$\mathcal{A} =$

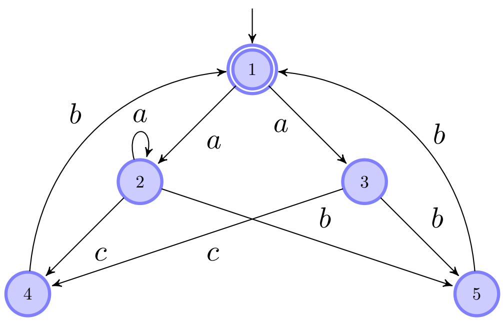


(a) Determine $L(\mathcal{A})$, utilizando o método das equações lineares.

(b) Indique um autómato determinista e acessível que reconheça $L(\mathcal{A})^*$.

(c) Determine o autómato minimal que reconhece $L(\mathcal{A})^*$.

26. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e o autómato $\mathcal{A}$ descrito na figura abaixo.



(a) Determine duas palavras de comprimento maior do que 7 que sejam aceites pelo autómato $\mathcal{A}$.

(b) Determine $L(\mathcal{A})$, utilizando o método das equações lineares.

(c) Indique um autómato síncrono determinista que reconheça $L(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(a^*b^*)$.

27. Seja $A = \{0, 1\}$. Considere as linguagens:

- L_1 constituída pelas palavras sobre A que têm pelo menos um algarismo repetido;
- L_2 constituída pelas palavras sobre A que têm um número par de ocorrências do símbolo 1 e um número ímpar de ocorrências do símbolo 0.

(a) Para cada uma das linguagens anteriores, determine um autómato que a reconhece.

(b) Para cada uma das linguagens anteriores, indique uma expressão regular que a represente.

(c) Determine o autómato minimal que reconhece L_1:

i. determinando-o por minimização do autómato calculado anteriormente;

ii. usando a construção com base no cálculo de resíduos.

28. Seja $A = \{a, b, c\}$ um alfabeto. Considere os seguintes autómatos finitos:

(i) $\mathcal{B}_1 = (\{1,2,3,4\}, A, \delta_1, 1, \{2,3\})$ em que a função de transição δ_1 é definida pela tabela abaixo.

δ_1	1	2	3	4
a	$\{2,4\}$	$\{3\}$	$\varnothing$	$\{4\}$
b	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$
c	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{1\}$

(ii) $\mathcal{B}_2 = (\{1,2,3,4\}, A, \delta_2, 1, \{3,4\})$ em que a função de transição δ_2 é definida pela tabela abaixo.

δ_2	1	2	3	4
a	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{2\}$
b	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
c	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$

(iii) $\mathcal{B}_3 = (\{1,2,3,4\}, A, \delta_3, 1, \{3,4\})$ em que a função de transição δ_3 é definida pela tabela abaixo.

δ_3	1	2	3	4
a	$\{1\}$	$\{1,3\}$	$\{4\}$	$\varnothing$
b	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
c	$\{2\}$	$\{1\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

De entre as afirmações seguintes selecione a afirmação verdadeira.

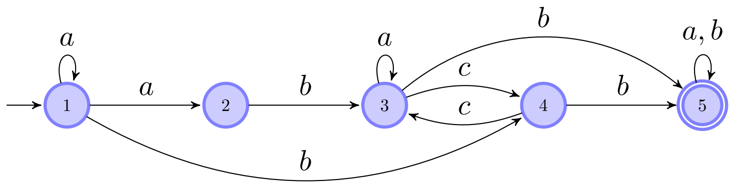
(a) $\mathcal{B}_2$ é um autómato minimal e $\mathcal{B}_2$ é equivalente a $\mathcal{B}_1$.

(b) $\mathcal{B}_1$ é um autómato minimal e $\mathcal{B}_2$ é equivalente a $\mathcal{B}_1$.

(c) $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ são autómatos equivalentes.

(d) $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_3$ são autómatos e acessíveis e são equivalentes.

29. Considere o alfabeto $A = \{a, b, c\}$ e o autómato $\mathcal{A}$ descrito na figura abaixo.



(a) Determine uma palavra, que admite o factor c^2a^3c, reconhecida pelo autómato $\mathcal{A}$ e verifique se $\mathcal{A}$ é determinista.

(b) Determine um autómato que seja determinista, completo e acessível e que reconheça a linguagem $L(\mathcal{A})$.

(c) Determine um autómato que seja determinista e acessível e que reconheça a linguagem $L(\mathcal{A})^*$.

(d) Calcule $L(\mathcal{A})^*$.

30. Sejam A um alfabeto e $L \subseteq A^*$ uma linguagem reconhecível. Mostre que $A^* \setminus L$ é uma linguagem reconhecível.

31. Seja $A = \{a, b\}$. Mostre que são reconhecíveis as linguagens:

    (a) $a^{-1}A^*abaA^*$;   (b) $(abab)^{-1}A^*abaA^*$.

32. Sejam A um alfabeto, $u \in A^*$ e L uma linguagem sobre A. Supondo que L é reconhecível, mostre que $u^{-1}L$ é uma linguagem reconhecível.

33. Elabore uma pequena pesquisa de modo a responder às questões seguintes.

    (a) Sejam A um alfabeto e L_1 e L_2 linguagens sobre A reconhecíveis. Mostre que:

        i. $L_1 \cap L_2$ é uma linguagem reconhecível;

        ii. $L_1 \setminus L_2$ é uma linguagem reconhecível.

    (b) Seja $A = \{a, b, c\}$. Mostre que são reconhecíveis as linguagens:

        i. K_1 constituída pelas palavras com um número par de ocorrências de a e que admitem bc como factor.

        ii. K_2 constituída por todas as palavras que têm um número par de ocorrências de a e que não têm ca^2 como fator.