Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2011/12

Teste de frequência — 18 de Junho de 2012
13h00
Salas 2202, 2203, 2204, 2205

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de **10** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos do **Método A** só devem responder às questões 7, 8, 9 e 10, devendo entregar o teste ao fim de uma hora.*
- *Os alunos do **Método B** devem responder a todas as questões, devendo entregar o teste ao fim de duas horas e meia.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Parte 1 — Método B

Questão 1 Sejam dadas as seguintes funções:

$$f = [\underline{True}\ , \neg \cdot \pi_2]$$
$$g = [k\ , \mathsf{succ} \cdot \pi_1]$$

onde $\neg :: Bool \to Bool$ é o operador booleano de negação e k é uma função arbitrária. Identifique, justificando, qual o tipo mais geral das expressões $[f\ , g]$ e $\langle f , g \rangle$.

RESOLUÇÃO:

- Tipagem de f: como $True \in Bool$, $Bool \xleftarrow{\underline{True}} A$; sendo $Bool \xleftarrow{\neg} Bool$, ter-se-á $Bool \xleftarrow{\neg \cdot \pi_2} B \times Bool$; e finalmente: $Bool \xleftarrow{f} A + B \times Bool$.
- Tipagem de g: sendo succ a função sucessor nos números naturais, tem-se $\mathbb{N}_0 \xleftarrow{\mathsf{succ} \cdot \pi_1} \mathbb{N}_0 \times C$. Sendo k uma função qualquer, ter-se á $\mathbb{N}_0 \xleftarrow{g} D + \mathbb{N}_0 \times C$.
- Tipagem de $\langle f , g \rangle$: para os tipos $A + B \times Bool$ e $D + \mathbb{N}_0 \times C$ unificarem ter-se-á que ter $A = D$, $B = \mathbb{N}_0$ e $C = Bool$; logo:

$$Bool \times \mathbb{N}_0 \xleftarrow{\langle f , g \rangle} A + \mathbb{N}_0 \times Bool$$

- Tipagem de $[f\ , g]$: neste caso os tipos de saída de f e g terão que ser o mesmo; mas $Bool$ é diferente de $\mathbb{N}_0$ — logo $[f\ , g]$ não é uma função bem tipada [1].

□

[1] **NB:** em Haskell succ é uma função genérica da classe $Enum$, $\mathsf{succ} :: Enum\ a \Rightarrow a \to a$, e $Bool$ é enumerado. Que impacto tem este facto no raciocínio acima?

Questão 2 Mostre que a expressão $[i_{11}\ , i_{22}] \cdot (\langle f, h\rangle + \langle g, k\rangle)$, onde $i_{11} = i_1 \times i_1$ e $i_{22} = i_2 \times i_2$, simplifica em $\langle f + g, h + k\rangle$.

RESOLUÇÃO: Ter-ser-á (complete as justificações fazendo referência às leis que são utilizadas em cada passo):

$$
\begin{array}{ll}
 & [i_{11}\ , i_{22}] \cdot (\langle f, h\rangle + \langle g, k\rangle) \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & [i_{11} \cdot \langle f, h\rangle\ , i_{22} \cdot \langle g, k\rangle] \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & [\langle i_1 \cdot f, i_1 \cdot h\rangle\ , \langle i_2 \cdot g, i_2 \cdot k\rangle] \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \langle [i_1 \cdot f\ , i_2 \cdot g], [i_1 \cdot h\ , i_2 \cdot k]\rangle \\
= & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
 & \langle f + g, h + k\rangle
\end{array}
$$

□

Questão 3 Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h) \qquad (1)$$

RESOLUÇÃO: Primeiro esboço do diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[d, "f+h"'] & \cdots \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+g\times h"] \\
\cdots & \cdots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

Sabendo-se que os tipos de somas e de produtos de funções são somas e produtos, o diagrama evolui para:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots + \cdots \arrow[d, "f+h"'] & \cdots + \cdots \times \cdots \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+g\times h"] \\
\cdots + \cdots & \cdots + \cdots \times \cdots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

Como a propriedade natural envolve quaisquer f, g e h, vamos tipá-las independentemente, por exemplo: $A \xrightarrow{f} A'$, $B \xrightarrow{g} B'$ e $C \xrightarrow{h} C'$. Tem-se então:

$$
\begin{tikzcd}
A + C \arrow[d, "f+h"'] & A + B \times C \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "f+g\times h"] \\
A' + C' & A' + B' \times C' \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

Logo, o tipo de α é $A + C \longleftarrow A + B \times C$. Terá assim que ser uma soma de funções. Quais? Como nada sabemos sobre A, ter-se-á necessariamente $\alpha = id + \beta$, para algum β de tipo $C \longleftarrow B \times C$. Mas como nada sabemos sobre B e C, terá necessariamente que ser $\beta = \pi_2$. Logo

$$\alpha = id + \pi_2$$

□

Questão 4 O conceito genérico de catamorfismo $(|g|)$ gerado pelo gene g é captado pela propriedade universal

$$k = (|g|) \quad \equiv \quad k \cdot in = g \cdot (\mathsf{F}\, k)$$

Mostre que:

$$(|f \cdot g|) \quad = \quad f \cdot (|g \cdot \mathsf{F}\, f|) \tag{2}$$

RESOLUÇÃO: O termo $f \cdot (|g \cdot \mathsf{F}\, f|)$ sugere o recurso à fusão-cata:

$$
\begin{array}{ll}
& (|f \cdot g|) = f \cdot (|g \cdot \mathsf{F}\, f|) \\
\Leftarrow & \quad \{ \text{ fusão-cata (atenção ao } \Leftarrow\text{: vamos à procura de uma condição } \textbf{suficiente} \text{ para a fusão se dar) } \} \\
& f \cdot (g \cdot \mathsf{F}\, f) = (f \cdot g) \cdot \mathsf{F}\, f \\
\equiv & \quad \{ \text{ composição é associativa } \} \\
& \text{TRUE}
\end{array}
$$

□

Questão 5 Considere a função seguinte

$rd\ [\,] = 0$
$rd\ (c : l) = (digitToInt\ c) * 10 \uparrow (\mathsf{length}\ l) + rd\ l$

que converte em números palavras que designam números, por exemplo, rd `"1024"` $= 1024$. Esta função é ineficiente por causa da invocação de length no caso recursivo, que degrada a sua *performance*. Para resolver esse problema, redefinem-se rd e length por forma a formarem um sistema de recursividade múltipla,

$rd = g \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out}$
$len = i \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out}$

para $\mathsf{F}f = id + id \times f$, onde

$g = [\underline{0}\ , h]$
$h\ (c, (n, k)) = (digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n$
$i = [\underline{0}\ , j]$
$j\ (c, (n, k)) = 1 + k$

Mostre que $rdlen = \langle rd, len\rangle$ é a função

$rdlen\ [\,] = (0, 0)$
$rdlen\ (c : l) = ((digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n, 1 + k)\ \textbf{where}\ (n, k) = rdlen\ l$

em que a referida ineficiência já não existe.

RESOLUÇÃO: O problema pede recurso à lei de recursividade múltipla. Em detalhe:

$$\left\{\begin{array}{l} rd = g \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out} \\ len = i \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \cdot \mathsf{out} \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ isomorfismos: } \mathsf{out} = \mathbf{in}^{\circ} \ \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rd \cdot \mathbf{in} = g \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \\ len \cdot \mathbf{in} = i \cdot (\mathsf{F}\langle rd, len\rangle) \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ lei de recursividade múltipla } \}$$

$$\{ \ \langle rd, len\rangle = (\!|\langle g, i\rangle|\!)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ enunciado: } rdlen = \langle rd, len\rangle \ ; \ g = [\underline{0}\ , h] \ ; \ i = [\underline{0}\ , j] \ \}$$

$$rdlen = (\!|\langle[\underline{0}\ , h], [\underline{0}\ , j]\rangle|\!)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ lei da troca } \}$$

$$rdlen = (\!|[\langle\underline{0}, \underline{0}\rangle\ , \langle h, j\rangle]|\!)$$

$$\equiv \quad \{ \text{ propriedade universal-cata (listas) } \}$$

$$rdlen \cdot \mathbf{in} = [\langle\underline{0}, \underline{0}\rangle\ , \langle h, j\rangle] \cdot (id + id \times rdlen)$$

$$\equiv \quad \{ \ \mathbf{in} = [nil\ , cons]\text{; etc (completar identificando as leis a que se recorre) } \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rdlen \cdot nil = \langle\underline{0}, \underline{0}\rangle \\ rdlen \cdot cons = \langle h, j\rangle \cdot (id \times rdlen) \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ introdução de variáveis, etc (identificar leis a que se recorre) } \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rdlen\ [\,] = (0, 0) \\ rdlen\ (c : l) = \langle h, j\rangle\ (c, rdlen\ l) \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ faça-se } rdlen\ l = (n, k)\text{, etc (identificar leis a que se recorre) } \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rdlen\ [\,] = (0, 0) \\ rdlen\ (c : l) = \langle h, j\rangle\ (c, (n, k))\ \mathbf{where}\ (n, k) = rdlen\ l \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ enunciado: } j\ (c, (n, k)) = 1 + k\text{, etc (identificar leis a que se recorre) } \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rdlen\ [\,] = (0, 0) \\ rdlen\ (c : l) = (h\ (c, (n, k)), 1 + k)\ \mathbf{where}\ (n, k) = rdlen\ l \end{array}\right.$$

$$\equiv \quad \{ \text{ enunciado: } h\ (c, (n, k)) = (digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n \ \}$$

$$\left\{\begin{array}{l} rdlen\ [\,] = (0, 0) \\ rdlen\ (c : l) = ((digitToInt\ c) * 10 \uparrow k + n, 1 + k)\ \mathbf{where}\ (n, k) = rdlen\ l \end{array}\right.$$

□

Questão 6 Considere o hilomorfismo

$$f = [\![[g\ , h], (p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k)]\!]$$

Represente f sob a forma de diagrama e mostre que f satisfaz a propriedade seguinte:

$$f = p \rightarrow g, h \cdot f \cdot k \tag{3}$$

RESOLUÇÃO: Para o hilomorfismo f satisfazer a propriedade temos antes de mais que encontrar os tipos mais gerais que estão envolvidos nessa propriedade. Faça-se, para começar:

$$A \xrightarrow{f} B \;,\; C \xrightarrow{p} Bool \;,\; D \xrightarrow{g} E \;,\; F \xrightarrow{h} G \;,\; H \xrightarrow{k} K$$

O termo $h \cdot f \cdot k$ força unificações que reduzem os tipos a

$$A \xrightarrow{f} B \;,\; C \xrightarrow{p} Bool \;,\; D \xrightarrow{g} E \;,\; B \xrightarrow{h} G \;,\; H \xrightarrow{k} A$$

A definição toda conduz finalmente a

$$A \xrightarrow{f} B \;,\; A \xrightarrow{p} Bool \;,\; A \xrightarrow{g} B \;,\; B \xrightarrow{h} B \;,\; A \xrightarrow{k} A$$

Assim, o gene $[g\ ,h]$ tem tipo $B \longleftarrow A + B$ e o gene $p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k$ tem tipo $A \longrightarrow A + A$. Num diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k"] \arrow[d, "f"] & A + A \arrow[d, "id + f"] \\
B & A + B \arrow[l, "{[g\ ,h]}"']
\end{tikzcd}$$

Falta ainda a identificação do tipo indutivo intermédio, que se obtém adicionando mais uma linha ao diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k"] \arrow[d, "anam"] & A + A \arrow[d, "id + anam"] \\
\mathsf{T}A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "catam"] & A + \mathsf{T}A \arrow[d, "id + catam"] \\
B & A + B \arrow[l, "{[g\ ,h]}"']
\end{tikzcd}
\qquad
f = \underbrace{[\!(p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k)\!]}_{anam} \cdot \underbrace{(\!|[g\ ,h]|\!)}_{catam}$$

O tipo intermédio pode pois definir-se em Haskell da forma seguinte:

$$\mathbf{data}\ T\ a = \mathit{Stop}\ a \mid \mathit{Next}\ (T\ a)$$

onde a escolha de *Stop* e *Next* é livre. Finalmente, pelo diagrama:

$$\begin{array}{ll}
& catam \cdot anam = [g\ ,h] \cdot (id + catam) \cdot (id + anam) \cdot (p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k) \\
\equiv & \quad \{ \text{ justificar } \} \\
& catam \cdot anam = [g\ ,h \cdot catam \cdot anam] \cdot (p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k) \\
\equiv & \quad \{ \; f = catam \cdot anam \; \} \\
& f = [g\ ,h \cdot f] \cdot (p \rightarrow i_1, i_2 \cdot k) \\
\equiv & \quad \{ \text{ justificar } \} \\
& f = p \rightarrow [g\ ,h \cdot f] \cdot i_1, [g\ ,h \cdot f] \cdot (i_2 \cdot k) \\
\equiv & \quad \{ \text{ justificar } \} \\
& f = p \rightarrow g, h \cdot f \cdot k
\end{array}$$

□

Parte 2 — Métodos A + B

Questão 7 Demonstre a propriedade

$$\overline{f \cdot g} \quad = \quad \overline{f \cdot ap} \cdot \overline{g} \tag{4}$$

Questão 8 Mostre que o anamorfismo de números naturais

$$f \quad = \quad [\!(\,(id + \pi_2) \cdot \mathsf{out}\,)\!] \tag{5}$$

— em que $\mathsf{out} \cdot [nil\ , cons] = id$, para $nil\ \_ = [\,]$ e $cons = \widehat{(:)}$ — é o catamorfismo de listas

$$f \quad = \quad (\!|\,[\underline{0}\ , \mathsf{succ} \cdot \pi_2]\,|\!) \tag{6}$$

para $\mathsf{succ}\ n = n + 1$.

Questão 9 Considere o catamorfismo

$unzp :: \mathsf{LTree}\ (a, b) \rightarrow (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ b)$
$unzp = (\!|\langle \mathsf{in} \cdot (\pi_1 + \pi_1 \times \pi_1), \mathsf{in} \cdot (\pi_2 + \pi_2 \times \pi_2)\rangle|\!)$

que divide uma árvore de pares num par de árvores. Mostre que a seguinte propriedade de cancelamento se verifica:

$$\pi_1 \cdot unzp \quad = \quad \mathsf{LTree}\ \pi_1 \tag{7}$$

RESOLUÇÃO: Recorde-se que $\mathsf{LTree}\ \pi_1 = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (\pi_1 + id)|\!)$, o que sugere o recurso à lei de fusão-cata: π_1 funde com o catamorfismo $unzp$, originando o catamorfismo $(\!|\ \mathbf{in} \cdot (\pi_1 + id)|\!)$.

Há ainda outra maneira de resolver esta questão: reparando que $\pi_1 + \pi_1 \times \pi_1$ se desdobra em $(\pi_1 + id) \cdot (id + \pi_1)$ e sabendo que o bifunctor de base de LTree é $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$, tem-se $\pi_1 + \pi_1 \times \pi_1 = \mathsf{B}\ (\pi_1, id) \cdot (\mathsf{F}\ \pi_1)$, isto é,

$unzp = (\!|\langle \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_1, id) \cdot (\mathsf{F}\ \pi_1), \mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (\pi_2, id) \cdot (\mathsf{F}\ \pi_2)\rangle|\!)$

sugerindo o recurso à lei de banana-split. (Completar quaisquer dos raciocínios.) $\square$

Questão 10 Demonstre a lei *identidade*-$\bullet$

$$u \bullet f \quad = \quad f \quad = \quad f \bullet u$$

válida em qualquer mónade.

RESOLUÇÃO: É imediato (completar as justificações):

$$
\begin{array}{cl}
 & u \bullet f \\
= & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mu \cdot \mathsf{T}u \cdot f \\
= & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & id \cdot f \\
= & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mu \cdot u \cdot f \\
= & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & \mu \cdot \mathsf{T}f \cdot u \\
= & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & f \bullet u
\end{array}
$$

□
