Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC e da LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2009/10

Teste de frequência — 18 de Junho 2010
11h00
Salas 2111, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205 e 2209

Importante — *Ler antes de iniciar a prova:*

- *Esta prova consta de* ***10*** *questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos do* ***Método A*** *só devem responder às questões 7, 8, 9 e 10, devendo entregar o teste ao fim de uma hora.*
- *Os alunos do* ***Método B*** *devem responder a todas as questões. Destas, as primeiras 6 têm a nota mínima de 8 valores.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Parte 1 — Método B apenas (8 valores de nota mínima)

Questão 1 À lei aritmética $(a+b)(c+d) = (ac+ad)+(bc+bd)$ corresponde o isomorfismo dos tipos de dados

$$
\begin{tikzcd}
(A+B)\times(C+D) \arrow[r, phantom, "\cong"] & (A\times C + A\times D)+(B\times C+B\times D) \arrow[l, bend left, "{h=[[i_1\times i_1\ ,i_1\times i_2]\ ,[i_2\times i_1\ ,i_2\times i_2]]}"]
\end{tikzcd}
$$

Apresente cálculos que mostrem que h coincide com a função seguinte, codificada em Haskell:

$h\ (\mathsf{Left}\ (\mathsf{Left}\ (a,c))) = (\mathsf{Left}\ a, \mathsf{Left}\ c)$
$h\ (\mathsf{Left}\ (\mathsf{Right}\ (a,d))) = (\mathsf{Left}\ a, \mathsf{Right}\ d)$
$h\ (\mathsf{Right}\ (\mathsf{Left}\ (b,c))) = (\mathsf{Right}\ b, \mathsf{Left}\ c)$
$h\ (\mathsf{Right}\ (\mathsf{Right}\ (b,d))) = (\mathsf{Right}\ b, \mathsf{Right}\ d)$

Questão 2 Demonstre a seguinte propriedade do combinador condicional de McCarthy

$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) \quad = \quad p \rightarrow a, d \tag{1}$$

sabendo que

$$(p? + p?) \cdot p? \quad = \quad (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{2}$$

se verifica.

Questão 3 Considere o isomorfismo

$$iso = \mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{coswap}) \tag{3}$$

em que swap e coswap são funções que conhece. Demonstre a propriedade natural de iso:

$$((f + g) \times k) \cdot iso = iso \cdot (k \times (g + f)) \tag{4}$$

RESOLUÇÃO: Há dois métodos para resolver esta questão. Um é calcular o tipo mais geral de iso unificando os diagramas de tipo dos seus componentes e depois desenhando o diagrama da lei natural. O outro é calcular a propriedade natural de iso a partir das propriedades naturais das funções que nela participam.

1. Pelo primeiro método — começamos por registar os tipos de todas as funções em jogo, usando símbolos diferentes

$$A \xleftarrow{id} A$$

$$C \times B \xleftarrow{\mathsf{swap}} B \times C$$

$$E + D \xleftarrow{\mathsf{coswap}} D + E$$

para se garantir, por unificação, o tipo mais geral. Daqui inferimos

$$A \times (E + D) \xleftarrow{id \times \mathsf{coswap}} A \times (D + E)$$

Só falta compôr com swap. Para isso será necessário que B unifique com A e C unifique com $E + D$. O resultado terá tipo

$$(E + D) \times A \xleftarrow{\overbrace{\mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{coswap})}^{iso}} A \times (D + E)$$

Agora é só fazer o diagrama do costume: (a) duas cópias de iso na horizontal, usando plicas (ou outras maiúsculas) nos tipos para garantir tipos diferentes uma vez mais, e (b) as expressões de tipo copiadas na vertical, substituindo as maiúsculas por letras designando funções. Se a associção escolhida for $E = f$, $D = g$ e $A = k$, ter-se-á o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(E + D) \times A \arrow[d, "(f+g)\times k"'] & A \times (D + E) \arrow[l, "iso"'] \arrow[d, "k \times (g+f)"] \\
(E' + D') \times A' & A' \times (D' + E') \arrow[l, "iso"]
\end{tikzcd}$$

de que se extrai a propriedade a justificar.

2. Pelo segundo método (cálculo analítico) — fazendo três diagramas como o acima para as funções swap, coswap e id, obtemos as propriedades naturais

$$(f \times g) \cdot \mathsf{swap} = \mathsf{swap} \cdot (g \times f) \tag{5}$$
$$(f + g) \cdot \mathsf{coswap} = \mathsf{coswap} \cdot (g + f) \tag{6}$$
$$f \cdot id = id \cdot f$$

(Esta última é a primeira propriedade do formulário.) Agora usam-se estas propriedades para "trocar as funções de sítio", cf. o cálculo que se segue, em que se deixam os passos por justificar (exercício para o leitor):

$$((f + g) \times k) \cdot iso$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad ((f + g) \times k) \cdot (\mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{coswap})) \\
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad \mathsf{swap} \cdot (k \times (f + g)) \cdot (id \times \mathsf{coswap}) \\
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad \mathsf{swap} \cdot ((k \cdot id) \times ((f + g) \cdot \mathsf{coswap})) \\
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad \mathsf{swap} \cdot ((id \cdot k) \times (\mathsf{coswap} \cdot (g + f))) \\
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad \mathsf{swap} \cdot ((id \times \mathsf{coswap}) \cdot (k \times (g + f))) \\
&= \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
&\quad iso \cdot (k \times (g + f))
\end{aligned}
$$

□

Questão 4 Considere a função $dmap$ (="double map")

$$
\begin{array}{l}
dmap :: (a \to b) \to (a \to b) \to [a] \to ([b],[b]) \\
dmap\ f\ g = \langle f1, f2 \rangle\ \mathbf{where} \\
\quad f1\ [\,] = [\,] \\
\quad f1\ (a : l) = (f\ a) : f2\ l \\
\quad f2\ [\,] = [\,] \\
\quad f2\ (a : l) = (g\ a) : f1\ l
\end{array}
$$

que aplica alternadamente as funções f e g aos elementos de uma lista.

Converta $dmap\ f\ g$ num catamorfismo aplicando-lhe a a lei de recursividade múltipla, para $\mathsf{F} f = id + id \times f$.

RESOLUÇÃO: Ver o processo de cálculo que se sugere nas páginas 27 e 28 do PDF das fichas de avaliação do método A. □

Questão 5 A função

$$
\begin{array}{l}
supermap :: (b \to b) \to [b] \to [b] \\
supermap\ f\ [\,] = [\,] \\
supermap\ f\ (a : l) = a : (\mathsf{map}\ f\ (supermap\ f\ l))
\end{array}
$$

pode ser expressa como o catamorfismo

$$
supermap\ f \quad = \quad (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + id \times \mathsf{map}\ f)\ |\!) \tag{7}
$$

Mostre que $supermap\ id = id$.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á (as justificações deixam-se como exercício):

$$
\begin{array}{ll}
& supermap\ id = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + id \times \mathsf{map}\ id) |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& supermap\ id = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + id \times (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + id \times id) |\!)) |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& supermap\ id = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + id \times (\!|\ \mathbf{in}\ |\!)) |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& supermap\ id = (\!|\ \mathbf{in}\ |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& supermap\ id = id
\end{array}
$$

□

Questão 6 Demonstre a propriedade natural

$$
(\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \quad = \quad \mathsf{mirror} \cdot (\mathsf{T}\ f) \tag{8}
$$

onde mirror é o catamorfismo

$$
\begin{array}{l}
\mathsf{mirror} :: \mathsf{LTree}\ a \longrightarrow \mathsf{LTree}\ a \\
\mathsf{mirror} = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!)
\end{array}
$$

que "espelha" uma árvore e $\mathsf{T}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + id) |\!)$ é o correspondente functor de tipo.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á (atenção ao uso da propriedade natural de swap):

$$
\begin{array}{ll}
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} = \mathsf{mirror} \cdot (\mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) \cdot (\mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} = (\!|(\mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap})) \cdot (f + id) |\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) |\!)
\end{array}
$$

A partir daqui ou se usa fusão ou cancelamento. No primeiro caso tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& (\mathsf{T}\ f) \cdot (\!|\ \mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) |\!) = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) |\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) \cdot (id + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathbf{in} \cdot (f + id) \cdot (id + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \cdot (id + \mathsf{swap}) = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) \cdot (id + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathbf{in} \cdot (f + id) \cdot (id + \mathsf{swap}) \cdot (id + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) \cdot (id + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (f + id) \cdot (id + \mathsf{swap}) = f + \mathsf{swap} \\
\equiv & \{ \ \} \\
& f + \mathsf{swap} = f + \mathsf{swap}
\end{array}
$$

No segundo caso ter-se-á:

$$
\begin{array}{ll}
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) |\!) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \cdot \mathbf{in} = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap}) \cdot (id + ((\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \times (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror})) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \cdot \mathbf{in} = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{swap} \cdot (\mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \cdot (\mathsf{mirror} \times \mathsf{mirror})) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathsf{mirror} \cdot \mathbf{in} = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \cdot (id + \mathsf{swap}) \cdot (\mathsf{mirror} \times \mathsf{mirror})) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathbf{in} \cdot (id + \mathsf{swap}) \cdot (id + \mathsf{mirror} \times \mathsf{mirror}) = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \cdot (id + \mathsf{swap}) \cdot (\mathsf{mirror} \times \mathsf{mirror})) \\
\Leftarrow & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& (\mathsf{T}\ f) \cdot \mathbf{in} = \mathbf{in} \cdot (f + \mathsf{T}\ f \times \mathsf{T}\ f) \\
\equiv & \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \} \\
& \mathsf{T}\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + id) |\!)
\end{array}
$$

□

Parte 2 — Métodos A + B

Questão 7 Demonstre a lei de fusão da exponenciação:

$$\overline{g} \cdot f \quad = \quad \overline{g \cdot (f \times id)} \tag{9}$$

Questão 8 Uma função g diz-se injectiva sempre que, para todo os habitantes x,y do seu tipo de entrada, a igualdade $g\ x = g\ y$ é suficiente para deduzir $x = y$. Um resultado da matemática diz-nos que, sempre que a igualdade *pointfree*

$$f \cdot g = id \tag{10}$$

se verifica, então g é injectiva e f é sobrejectiva.

Com base neste resultado e nas leis do cálculo de produtos e coprodutos que conhece, mostre que i_1, i_2 são funções injectivas e π_1,π_2 são sobrejectivas.

RESOLUÇÃO: Para os casos i_1 e π_1 (para i_2 e π_2 faz-se a mesma coisa):

- Para mostrar que i_1 é injectiva, substituimos g em (10) acima por i_1, obtendo $f \cdot i_1 = id$. Agora basta encontrar uma lei que nos ajude a encontrar (um) f. Por inspecção no formulário, é fácil ver que essa lei é a de cancelamento-+ (17):

$$
\begin{array}{ll}
& [g\ , h] \cdot i_1 = g \\
\Rightarrow & \{ \text{ substituindo } g \text{ por } id \ \} \\
& [id\ , h] \cdot i_1 = id
\end{array}
$$

Logo, para qualquer h, $[id\ , h]$ garante i_1 injectiva.

- Para mostrar que π_1 é sobrejectiva, substituimos f em (10) acima por π_1, obtendo-se $\pi_1 \cdot g = id$. O processo é idêntico, usando-se agora o cancelamento-$\times$, ie. a lei (6) do formulário.

$\square$

Questão 9 Considere a função

$$
\begin{array}{l}
join\ [\,] = [\,] \\
join\ [a] = [a] \\
join\ ((y, x) : (y', x') : l) \\
\quad \mid y \equiv y' = join\ ((y, x + x') : l) \\
\quad \mid \neg\ (y \equiv y') = (y, x) : join\ ((y', x') : l)
\end{array}
$$

que processa sequências de rectângulos (y, x) — em que y determina a altura e x a largura de um rectângulo —, *juntando* rectângulos sucessivos com a mesma altura num só.

Os quatro casos em que $join$ se decompõe são captados pela sua definição como hilomorfismo,

$$join = (\!|g|\!) \cdot [\!(h)\!] \tag{11}$$

sobre o tipo

$$\mathbf{data}\ T\ a = N \mid V\ a \mid L\ (T\ a) \mid P\ (a, T\ a)$$

em que $\mathbf{in} = [[\underline{N}\ , V]\ , [L\ , P]]$, para $\mathsf{F} f = (id + id) + (f + id \times f)$. O gene h desse hilomorfismo é a função

$$
\begin{array}{l}
h\ [\,] = i_1\ (i_1\ ()) \\
h\ [x] = i_1\ (i_2\ x) \\
h\ ((n, d) : (n', d') : l) \\
\quad \mid n \equiv n' = i_2\ (i_1\ ((n, d + d') : l)) \\
\quad \mid \neg\ (n \equiv n') = i_2\ (i_2\ ((n, d), (n', d') : l))
\end{array}
$$

Qual é o gene g? Escreva-o em notação *pointfree* e acompanhe a sua resposta com um diagrama explicativo do hilomorfismo $join$.

Questão 10 Defina a função

$$fmapm :: (Monad\ m) \Rightarrow (a \rightarrow m\ a) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a \rightarrow m\ (\mathsf{LTree}\ a)$$

como resultado da "monadificação" da função

$$
\begin{array}{l}
fmap :: (a \rightarrow b) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a \rightarrow \mathsf{LTree}\ b \\
fmap\ f = (\!|\ \mathbf{in} \cdot (f + id)|\!)
\end{array}
$$
