**Cálculo de Programas**

2.º Ano de MiEI+LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2017/18

Exame da época especial — 24 de Julho de 2018
09h00–11h00
Sala CP2-0.20

---

*Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (2h)

**Questão 1** Determine — justificando — qual é o tipo mais geral da função $\alpha = \langle i_1 \cdot i_2, \pi_1 \cdot \pi_2 \rangle$.

---

**Questão 2** Recordando o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} A \times B + A \times C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{undistr}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A \times (B + C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{distr}"] \end{tikzcd}$$

mostre — sem usar as definições de distr ou undistr — que a igualdade

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k \tag{E1}$$

é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \mathsf{undistr} \tag{E2}$$

quaisquer que sejam as funções $k$, $h$, $g$ ou $f$. (**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

---

**Questão 3** Demonstre a seguinte propriedade do condicional de McCarthy

$$\langle (p \rightarrow f \ , \ h), (p \rightarrow g \ , \ i) \rangle \ = \ p \rightarrow \langle f, g \rangle \ , \ \langle h, i \rangle \tag{E3}$$

---

**Questão 4** Numa das fichas desta disciplina mostrou-se que

$$\llparenthesis \mathsf{in}_2 \cdot \alpha \rrparenthesis = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out}_1)\!] \tag{E4}$$

sempre que existe uma função polimórfica $\alpha : \mathsf{F}\ X \rightarrow \mathsf{G}\ X$ entre os functores $\mathsf{F}$ e $\mathsf{G}$ associados aos dois tipos indutivos $\mathsf{T}_1$ e $\mathsf{T}_2$ que estão em jogo:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_1 \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}_1"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{F}\ \mathsf{T}_1 \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}_1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{T}_2 \arrow[rr, bend left, "\mathsf{out}_2"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & \mathsf{G}\ \mathsf{T}_2 \arrow[ll, bend left, "\mathsf{in}_2"] \end{tikzcd}$$

Considere os catamorfismos

$$\left\{\begin{array}{l} f\ Empty = 0 \\ f\ (Node\ (a,(t,t'))) = 1 + f\ t + f\ t' \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} g\ [\,] = 0 \\ g\ (a:x) = 1 + g\ x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} h\ [\,] = 0 \\ h\ (a:x) = a + h\ x \end{array}\right.$$

cujos tipos constam do anexo a esta prova. Indique quais destes catamorfismos podem ser definidos como anamorfismos de acordo com (E4), identificando $\alpha$ se assim for o caso.

---

**Questão 5** Considere a seguinte função escrita em Haskell para calcular as posições de um elemento numa lista:

$$pos :: (Eq\ a) \Rightarrow a \rightarrow [a] \rightarrow [\mathbb{Z}]$$
$$pos\ a\ l = [y \mid (x,y) \leftarrow \mathsf{zip}\ l\ [1\,..], x \equiv a]$$

Esta função pode ser re-escrita como o catamorfismo $pos\ a = (\![\mathsf{nil}\,, g\ a]\!)$. Apresente a definição de $g\ a$, justificando. Acompanhe a sua resolução de um diagrama.

---

**Questão 6** Recorde o catamorfismo

$$\mathsf{concat} = (\![\mathsf{nil}\,, \mathsf{conc}]\!) \tag{E5}$$

que concatena listas de listas. Mostre que a propriedade

$$\mathsf{length} \cdot \mathsf{concat} = \mathsf{sum} \cdot \mathsf{map\ length} \tag{E6}$$

se verifica, recorrendo às leis dos catamorfismos que conhece.

---

**Questão 7** O número de movimentos que solucionam o "puzzle" das Torres de Hanoi, com $n$ discos, é dado por

$$k\ n = 2^n - 1$$

Mostre (recorrendo à lei de recursividade mútua) que uma forma de calcular $k$ é

$$\begin{array}{l} k = \pi_1 \cdot g\ \mathbf{where} \\ \quad g = \mathsf{for}\ loop\ (0,1) \\ \quad loop\ (k,e) = (k+e, 2*e) \end{array}$$

sabendo que $k$ satisfaz as equações

$$k\ 0 = 0$$
$$k\ (n+1) = 2^n + k\ n$$

(como facilmente se prova) e que $2^n = \mathsf{for}\ (2*)\ 1\ n$.

---

**Questão 8** Mostre que o ciclo-for

$$k = \mathsf{for}\ (b \bullet id)\ (u\ i) \tag{E7}$$

onde $b : A \rightarrow \mathsf{T}\ A$ para um dado mónade $A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A)$ é a função

$$k\ 0 = \mathsf{return}\ i$$
$$k\ (n+1) = \mathbf{do}\ \{x \leftarrow k\ n; b\ x\}$$

Faça um diagrama para $k$. **Sugestão**: use

$$(f \bullet g)\ a = \mathbf{do}\ \{b \leftarrow g\ a; f\ b\} \tag{E8}$$

e outras leis que conhece do cálculo de mónades.

---

ANEXO — Catálogo de tipos de dados estudados na disciplina.

1. Números naturais:

$$\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{succ}] \tag{E9}$$

   Haskell: $Int$ inclui $\mathbb{N}_0$.

2. Listas de elementos em $A$:

$$\mathsf{T} = A^* \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}] \tag{E10}$$

   Haskell: $[\,a\,]$.

3. Árvores com informação de tipo $A$ nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node] \tag{E11}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$.

4. Árvores com informação de tipo $A$ nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Leaf, Fork] \tag{E12}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$.

5. Árvores quaternárias com informação de tipo $A$ nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{QTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Cell, Block] \tag{E13}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{QTree}\ a = Cell\ a \mid Block\ ((\mathsf{QTree}\ a, \mathsf{QTree}\ a), (\mathsf{QTree}\ a, \mathsf{QTree}\ a))$.

6. Árvores com informação nos nós e nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Unit, Comp] \tag{E14}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$.