Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2012/13

Exame (época especial) — 12 de Setembro 2013
09h00
Sala CP2-304

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Questão 1 Considere o combinador $comb\ f$ definido por

$$comb\ f = [id\ , f] \cdot (i_1 + i_2) \cdot f$$

Mostre através de um diagrama que o tipo de $comb$ é

$$comb : (C + B \to A + B) \to C + B \to A + B$$

e demonstre analiticamente que $comb\ id = id$.

Questão 2 Formule a propriedade natural da função $\mathsf{iso} = \langle \mathsf{swap} \cdot (\pi_1 \times id), ! \rangle$ que testemunha o isomorfismo

$$\begin{tikzcd}(B \times A) \times 1 \arrow[r, phantom, "\cong"] & (A \times 1) \times B \arrow[l, bend left, "\mathsf{iso}"]\end{tikzcd}$$

da direita para a esquerda, provando-a analiticamente.

Questão 3 Demonstre a lei do condicional

$$p \to (q \to c, d), c \quad = \quad (p \Rightarrow q) \to c, d$$

sabendo que

$$(p \Rightarrow q)? \quad = \quad [q?\ , i_1] \cdot p? \qquad (1)$$

é uma propriedade da implicação de predicados.

Questão 4 O combinador

$$\mathit{flip} :: (a \to b \to c) \to b \to a \to c$$
$$\mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x$$

troca a ordem dos argumentos de uma função. É fácil de ver que flip é um isomorfismo de exponenciais:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A \times B} & \cong & C^{B \times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f} \cdot \mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f \end{array}$$

Apresente justificações para os passos seguintes do cálculo desse isomorfismo a partir da sua definição ao ponto (*pointwise*):

$$
\begin{array}{ll}
& \mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap}\ (\mathit{flip}\ f\ x, y) = \mathsf{ap}\ (f\ y, x) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& (\mathsf{ap} \cdot (\mathit{flip}\ f \times id))\ (x, y) = (\mathsf{ap} \cdot (f \times id))\ (y, x) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\mathit{flip}\ f \times id) = \mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (\overline{\widehat{f}} \times id) \cdot \mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}
\end{array}
$$

Questão 5 O apuramento do valor médio das folhas de uma árvore binária t

$$avg\ t = \frac{\mathsf{sum}\ t}{count\ t}$$

de tipo LTree mostra a necessidade de duas travessias de t, uma feita por $\mathsf{sum} = (\![[id\ , \mathsf{add}]]\!)$ e a outra por $count = (\![[\underline{1}\ , \mathsf{add}]]\!)$, onde $\mathsf{add} = \widehat{(+)}$. A lei de "banana-split"

$$\langle (\![i]\!), (\![j]\!) \rangle = (\![h]\!) \quad \Leftarrow \quad h = \langle i \cdot \mathsf{F}\,\pi_1, j \cdot \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle \tag{2}$$

permite fazer o mesmo apuramento com uma só travessia:

$$
\begin{array}{l}
avg\ t = n\ /\ d\ \mathbf{where} \\
\quad (n, d) = aux\ t \\
\quad\quad aux\ (Leaf\ a) = (a, 1) \\
\quad\quad aux\ (Fork\ (x, y)) = (n1 + n2, d1 + d2) \\
\quad\quad\quad \mathbf{where}\ (n1, d1) = aux\ (Fork\ x) \\
\quad\quad\quad\quad (n2, d2) = aux\ (Fork\ y)
\end{array}
$$

Apresente justificações para os seguintes passos que já se deram no processo de conversão do par ("split") de catamorfismos sum e $count$ num único catamorfismo, de que o algoritmo acima deriva:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \mathsf{sum}, count \rangle = (\![h]\!) \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \langle (\![[id\ , \mathsf{add}]]\!), (\![[\underline{1}\ , \mathsf{add}]]\!) \rangle = (\![h]\!) \\
\Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\,\pi_1, [\underline{1}\ , \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\,\pi_2 \rangle \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& h = \langle [id\ , \mathsf{add} \cdot (\pi_1 \times \pi_1)], [\underline{1}\ , \mathsf{add} \cdot (\pi_2 \times \pi_2)] \rangle \\
\equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & h = [\langle id, \underline{1} \rangle \,, \langle \mathsf{add} \cdot (\pi_1 \times \pi_1), \mathsf{add} \cdot (\pi_2 \times \pi_2) \rangle] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & h = [\langle id, \underline{1} \rangle \,, h2] \ \mathbf{where}\ h2\ ((n1, d1), (n2, d2)) = (n1 + n2, d1 + d2)
\end{array}
$$

Questão 6 Recordando o isomorfismo

$$\mathsf{undistl} = [i_1 \times id \,, i_2 \times id] \tag{3}$$

e o seu inverso distl cuja propriedade natural é

$$(f \times h + g \times h) \cdot \mathsf{distl} = \mathsf{distl} \cdot ((f + g) \times h) \tag{4}$$

mostre que o catamorfismo de listas

$$f = (\!|[\mathsf{nil} \,, [\pi_2 \,, \mathsf{cons}] \cdot \mathsf{distl}]|\!)$$

é a função

$$
\begin{array}{l}
f\ [\,] = [\,] \\
f\ ((i_1\ a) : t) = f\ t \\
f\ ((i_2\ b) : t) = b : f\ t
\end{array}
$$

que selecciona todos os Bs que ocorrem numa lista de As ou Bs.

Questão 7 Como sabe, foldr $f\ y = (\!|[\underline{y} \,, \widehat{f}]|\!)$. Pretende-se provar, usando a lei de fusão-cata, a propriedade

$$x + (\mathsf{foldr}\ (+)\ y\ s) = \mathsf{foldr}\ (+)\ (x + y)\ s$$

Complete a seguinte prova desse facto, em que se abrevia $\mathsf{add} = \widehat{(+)}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & x + (\mathsf{foldr}\ (+)\ y\ s) = \mathsf{foldr}\ (+)\ (x + y)\ s \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (x+) \cdot (\mathsf{foldr}\ (+)\ y) = \mathsf{foldr}\ (+)\ (x + y) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
 & (x+) \cdot (\!|[\underline{y} \,, \mathsf{add}]|\!) = (\!|[\underline{x + y} \,, \mathsf{add}]|\!) \\
\cdots & \qquad \{ \ \text{... varios passos ...} \ \} \\
 & \vdots \\
\cdots & \qquad \{ \ \text{...} \ \} \\
 & \textsc{True}
\end{array}
$$

Importante: Não esqueça a propriedade $f \cdot \underline{k} = \underline{f\ k}$ e assuma a que se segue, válida na aritmética,

$$x + (y + z) = y + (x + z)$$

que, em notação *pointfree*, se pode escrever

$$(x+) \cdot \mathsf{add} \quad = \quad \mathsf{add} \cdot (id \times (x+)) \tag{5}$$

Questão 8 Demonstre a propriedade

$$[\!(g \cdot f)\!] \quad = \quad [\!(\mathsf{F}\, f \cdot g)\!] \cdot f$$

recorrendo a propriedades dos anamorfismos que conhece.

Questão 9 Recorra à lei de absorção-cata para demonstrar a propriedade

$$\mathsf{count} \quad = \quad \mathsf{count} \cdot (\mathsf{LTree}\; f) \tag{6}$$

onde $\mathbb{N}_0 \xleftarrow{\mathsf{count}} \mathsf{LTree}\; A$ é o catamorfismo

$$\mathsf{count} = (\![\underline{1}\,, \widehat{(+)}]\!)$$

e $\mathsf{LTree}\; f = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (f + id)|\!)$ é o correspondente functor de tipo.

Questão 10 O functor

$$\mathsf{T}\; X = X \times X$$
$$\mathsf{T}\; f = f \times f$$

oferece um mónade que nos permite trabalhar com pares encarados como vectores a duas dimensões. Por exemplo, neste mónade a expressão

$$\mathbf{do}\;\{x \leftarrow (2,3); y \leftarrow (4,5); \mathsf{return}\;(x+y)\}$$

dá $(6,8)$ como resultado — a soma dos vectores $(2,3)$ e $(4,5)$.

Fazendo $\mu = \pi_1 \times \pi_2$ e $u = \langle id, id\rangle$, demonstre as seguintes propriedades essenciais à evidência de que o functor dado equipado com μ e u é, de facto, um mónade:

$$\mu \cdot u = id \tag{7}$$
$$\mu \cdot u = \mu \cdot \mathsf{T}\; u \tag{8}$$
$$\mu \cdot \mu = \mu \cdot \mathsf{T}\; \mu \tag{9}$$
