Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+MiEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2018/19

Exame de Recurso — 22 de Junho de 2019
09h00–11h00
Salas E2-1.01/1.03

- *Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*
- *Os alunos devem ler a prova antes de decidirem por que ordem responder às questões colocadas.*
- *Quem desejar responder à questão 7 no próprio enunciado deve preencher o número ao fundo da respectiva página antes de entregar.*

PROVA SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} :: a \rightarrow b \rightarrow a \\ \mathsf{const}\ a\ b = a \end{array}$$

está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const}\ k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle$$

a partir de propriedades do cálculo de programas que constam do formulário.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{(b, a)} = \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-}\times \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot \underline{(b, a)} = \underline{b} \\ \pi_2 \cdot \underline{(b, a)} = \underline{a} \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ f \cdot \underline{k} = \underline{f\ k} \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{\pi_1\ (b, a)} = \underline{b} \\ \underline{\pi_2\ (b, a)} = \underline{a} \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \pi_1\ (a, b) = a \wedge \pi_2\ (a, b) = b \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{b} = \underline{b} \\ \underline{a} = \underline{a} \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 2 Seja xl uma função que se sabe satisfazer esta propriedade,

$$\langle\langle f, g\rangle, h\rangle = \mathsf{xl} \cdot \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \tag{E1}$$

para quaisquer f, g e h. Calcule a definição de xl e, a partir dela, derive a sua propriedade grátis. **Sugestão**: resolva a equação $\langle\langle f, h\rangle, g\rangle = id$ e use as soluções para obter xl e o seu tipo mais geral.

RESOLUÇÃO: Duas alternativas para a primeira parte:

- Seguindo a sugestão, comecemos por reduzir $\langle\langle f, h\rangle, g\rangle$ a id:

$$\begin{array}{ll} & \langle\langle f, h\rangle, g\rangle = id \\ \equiv & \quad \{ \text{ universal-}\times \ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \langle f, h\rangle = \pi_1 \\ g = \pi_2 \end{array} \right. \\ \equiv & \quad \{ \text{ universal-}\times \ \} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f = \pi_1 \cdot \pi_1 \\ h = \pi_2 \cdot \pi_1 \end{array} \right. \\ g = \pi_2 \end{array} \right. \end{array}$$

  Como $\mathsf{xl} \cdot id = \mathsf{xl}$ ter-se-á

$$\mathsf{xl} = \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2\rangle, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle$$

  Daqui infere-se de imediato o tipo $(A \times C) \times B \xleftarrow{\mathsf{xl}} (A \times B) \times C$.

- Sem se seguir a sugestão: $\langle\langle f, h\rangle, g\rangle$ tem tipo mais geral $(A \times B) \times C \leftarrow D$. Logo, $\langle\langle f, g\rangle, h\rangle$ terá o tipo $(A \times C) \times B \leftarrow D$. Finalmente, $(A \times C) \times B \xleftarrow{\mathsf{xl}} (A \times B) \times C$ fecha o triângulo.

  Definição: faça-se $\mathsf{xl} = \langle \alpha, \beta\rangle$, em que $A \times C \xleftarrow{\alpha} (A \times B) \times C$ e $B \xleftarrow{\beta} (A \times B) \times C$. Para A, B e C o mais gerais possível, $\alpha = \pi_1 \times id$ e $\beta = \pi_2 \cdot \pi_1$, como acima.

Propriedade grátis: o método habitual, baseado num diagrama, dará:

$$((f \times h) \times g) \cdot \mathsf{xl} = \mathsf{xl} \cdot ((f \times g) \times h)$$

□

Questão 3 Sabendo que as igualdade

$$(p? + p?) \cdot p? \ = \ (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{E2}$$

se verifica, demonstre a seguinte propriedade combinador conhecido por condicional de McCarthy:

$$p \rightarrow (p \rightarrow a \ , \ b) \ , \ (p \rightarrow c \ , \ d) \ = \ p \rightarrow a \ , \ d \tag{E3}$$

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& p \rightarrow (p \rightarrow a\ ,\ b)\ ,\ (p \rightarrow c\ ,\ d) \\
= & \qquad \{\ \text{definição de condicional (30), 3 vezes}\ \} \\
& [[a\,,b] \cdot p?\,,[c\,,d] \cdot p?] \cdot p? \\
= & \qquad \{\ \text{absorção-+ (22) ; (E2)}\ \} \\
& [[a\,,b]\,,[c\,,d]] \cdot (i_1 + i_2) \cdot p? \\
= & \qquad \{\ \text{cancelamento-+ (18)}\ \} \\
& [a\,,d] \cdot p? \\
= & \qquad \{\ \text{definição de condicional (30)}\ \} \\
& p \rightarrow a\ ,\ d \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

Questão 4 A função seguinte, escrita em Haskell

$k : [A + B] \rightarrow [B]$
$k\ [\,] = [\,]$
$k\ (\mathsf{Left}\ a : x) = [\,]$
$k\ (\mathsf{Right}\ b : x) = b : k\ x$

é uma espécie de $takeWhile$: copia para a saída todos os elementos do tipo B até à ocorrência do primeiro elemento de tipo A, por exemplo: $k\ [\mathsf{Right}\ 3, \mathsf{Left}\ \mathtt{'x'}, \mathsf{Right}\ 4] = [3]$.

Mostre que k é o seguinte catamorfismo de listas,

$$k = (\![[\mathsf{nil}\,, \mathsf{in}] \cdot (id + \mathsf{distl})]\!) \tag{E4}$$

onde o isomorfismo $(A \times C) + (B \times C) \xleftarrow{\mathsf{distl}} (A + B) \times C$ tem como inverso $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$. **Sugestão**: parta da propriedade universal-cata e anote a propriedade grátis de distl, pois vai ser-lhe útil no exercício.

RESOLUÇÃO: Anotando a prorpiedade grátis de distl, conforme sugestão:

$$((f \times h) + (g \times h)) \cdot \mathsf{distl} = \mathsf{distl} \cdot ((f + g) \times h)$$

De seguida:

$$
\begin{array}{ll}
& f = (\![[\mathsf{nil}\,, \mathsf{in}] \cdot (id + \mathsf{distl})]\!) \\
\equiv & \qquad \{\ \text{universal-cata}\ \} \\
& f \cdot \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{in}] \cdot (id + \mathsf{distl}) \cdot (id + id \times f) \\
\equiv & \qquad \{\ \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}]\text{; absorção-+; fusão-+; functor-+}\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ f \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{in} \cdot \mathsf{distl} \cdot (id \times f) \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{\ \text{natural distl, para } id + id = id\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ f \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{in} \cdot (id \times f + id \times f) \cdot \mathsf{distl} \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{\ \text{isomorfismo distl / undistl}\ \}
\end{array}
$$

$$\begin{cases} f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ f \cdot \mathsf{cons} \cdot \mathsf{undistl} = \mathsf{in} \cdot (id \times f + id \times f) \end{cases}$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ definição de } \mathsf{undistl}\text{; } \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}]\text{; absorção-+; fusão-+ } \}$$

$$\begin{cases} f \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ \begin{cases} f \cdot \mathsf{cons} \cdot (i_1 \times id) = \mathsf{nil} \\ f \cdot \mathsf{cons} \cdot (i_2 \times id) = \mathsf{cons} \cdot (id \times f) \end{cases} \end{cases}$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ introdução de variáveis } \}$$

$$f\ [\,] = [\,]$$
$$f\ (i_1\ a : x) = [\,]$$
$$f\ (i_2\ b : x) = b : f\ x$$

□

Questão 5 O Arquivo Distrital de Braga é um dos mais importantes do país, tendo actualmente à sua guarda 611 fundos documentais com acesso on-line a partir de `https://bit.ly/2IVeoWJ`. O HTML dessa página foi gerado em Haskell (5 segs) a partir do respectivo catálogo, usando o hilomorfismo $untar$ que se segue e que produz uma *floresta* de expressões, a partir da qual a função $pict$ do módulo Exp[1] gera o HTML:

$$\begin{array}{l} untar = a \cdot (base\ id\ id\ untar) \cdot c\ \mathbf{where} \\ \quad a = sort \cdot inExp^* \\ \quad c = \mathsf{join} \cdot (id \times \mathsf{collect}) \cdot \mathsf{sep} \cdot o^* \\ \quad o = (\pi_2 + \mathsf{assocr}) \cdot \mathsf{distl} \cdot (\mathsf{out_{List}} \times id) \\ \quad base\ a\ b\ y = (b + a \times y)^* \end{array}$$

Identifique, justificando, as funções α, β, γ e ω e os tipos X, Y, Z no seguinte diagrama do hilomorfismo $untar$:

$$\begin{tikzcd} (A^* \times B)^* \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "untar"'] & X \arrow[r, "\mathsf{sep}"] & B^* \times (A \times (A^* \times B))^* \arrow[r, "\beta"] & Y \arrow[r, "\mathsf{join}"] & (B + A \times (A^* \times B)^*)^* \arrow[d, "\alpha"] \\ (\mathsf{Exp}\ B\ A)^* & & (\mathsf{Exp}\ B\ A)^* \arrow[ll, "\gamma"] & & Z \arrow[ll, "inExp^*"] \end{tikzcd}$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á (justificar):

$$\begin{tikzcd} (A^* \times B)^* \arrow[r, "o^*"] \arrow[dd, "untar"'] & (B + (A \times (A^* \times B)))^* \arrow[r, "\mathsf{sep}"] & B^* \times (A \times (A^* \times B))^* \arrow[d, "id \times \mathsf{collect}"] & \\ & & B^* \times (A \times (A^* \times B)^*)^* \arrow[r, "\mathsf{join}"] & (B + A \times (A^* \times B)^*)^* \arrow[d, "base\ id\ id\ untar"] \\ (\mathsf{Exp}\ B\ A)^* & (\mathsf{Exp}\ B\ A)^* \arrow[l, "sort"] & & (B + A \times (\mathsf{Exp}\ B\ A)^*)^* \arrow[ll, "inExp^*"] \end{tikzcd}$$

□

---

[1] Que faz parte do material da disciplina (`https://bit.ly/2FmSg6B`).

Questão 6 Considere a função $depth = (\![[\mathsf{one}, \mathsf{succ} \cdot umax]]\!)$ que calcula a profundidade de árvores de tipo LTree, onde $umax\ (a, b) = max\ a\ b$.

Mostre, por absorção-cata, que a profundidade de uma árvore t não é alterada quando aplica uma função f a todas as suas folhas:

$$depth \cdot \mathsf{LTree}\ f = depth \qquad \text{(E5)}$$

RESOLUÇÃO: Estamos em LTree, em que $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g \times g$, logo $\mathsf{B}\ (f, id) = f + id$. É quase imediato:

$$
\begin{array}{ll}
& depth \cdot \mathsf{LTree}\ f = depth \\
\equiv & \quad \{\ depth = (\![[\mathsf{one}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]]\!)\ ;\ \text{absorção-cata em LTree, para } \mathsf{B}\ (f, id) = f + id\ \} \\
& (\![[\mathsf{one}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}] \cdot (f + id)]\!) = depth \\
\equiv & \quad \{\ \text{absorção-+ ; função constante one}\ \} \\
& (\![[\mathsf{one}, \mathsf{succ} \cdot \widehat{max}]]\!) = depth \\
\equiv & \quad \{\ \text{definição dada para } depth\ \} \\
& true \\
\square &
\end{array}
$$

$\square$

Questão 7 Considere a seguinte lei de recursividade mútua válida para hilomorfismos que partilham o mesmo anamorfismo:

$$\langle f, g \rangle = (\!|\langle h, k \rangle|\!) \cdot [\!(q)\!] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \qquad \text{(E6)}$$

- Derive a lei de recursividade mútua do formulário a partir de (E6). (Sugestão: procure a lei de reflexão-ana do formulário.)
- Apresente as justificações em falta no seguinte cálculo da lei (E6):

$$
\begin{array}{ll}
& \langle f, g \rangle = (\!|\langle h, k \rangle|\!) \cdot [\!(q)\!] \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\!(q)\!], \beta \cdot [\!(q)\!] \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = \alpha \cdot [\!(q)\!] \\ g = \beta \cdot [\!(q)\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\!(q)\!] \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\!(q)\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\!(q)\!] \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\!(q)\!] \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

- A lei de reflexão-ana diz-nos que $[\![\mathsf{out}]\!] = id$. Basta fazer $q = \mathsf{out}$ em (E6) e simplificar.
- Justificações em falta no cálculo da lei (E6): faça-se

$$
\langle \alpha, \beta \rangle = (\!| \langle h, k \rangle |\!) \tag{E7}
$$

o que, pela lei de Fokkinga, garante:

$$
\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \\ \beta \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \end{array} \right. \tag{E8}
$$

Então:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle f, g \rangle = (\!| \langle h, k \rangle |\!) \cdot [\![q]\!] \\
\equiv & \quad \{ \ \text{(E7); fusão-}\times \ \} \\
& \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \\
\equiv & \quad \{ \ \text{Eq-}\times \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = \alpha \cdot [\![q]\!] \\ g = \beta \cdot [\![q]\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \text{(E8); isomorfismo } \mathsf{in} \ / \ \mathsf{out} \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\![q]\!] \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{out} \cdot [\![q]\!] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \text{cancelamento-ana } \times 2 \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\![q]\!] \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \mathsf{F}\ [\![q]\!] \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \text{functor } \mathsf{F} \text{ e fusão-}\times\text{, nas duas igualdades} \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \text{cf. } \langle f, g \rangle = \langle \alpha \cdot [\![q]\!], \beta \cdot [\![q]\!] \rangle \text{ acima} \ \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f = h \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \\ g = k \cdot \mathsf{F}\ \langle f, g \rangle \cdot q \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

□

Questão 8 Pode mostrar-se que a seguinte variante do tipo "rose tree"

$$\mathbf{data}\ \mathsf{Rose}\ a = L\ a \mid R\ [\mathsf{Rose}\ a]$$

que tem por base $\mathsf{B}\ (f, g) = f + g^*$, forma um mónade

$$X \xrightarrow{u} \mathsf{Rose}\ X \xleftarrow{\mu} \mathsf{Rose}\ (\mathsf{Rose}\ X)$$

onde

$$u = L \tag{E9}$$
$$\mu = (\!|[id, \mathsf{in} \cdot i_2]|\!) \tag{E10}$$

Construa as funções in / out para este tipo e desenhe o diagrama dos seus catamorfismos. Com base nesse diagrama,

- Converta para Haskell com variáveis a componente μ do referido mónade.
- Mostre que a lei monádica $\mu \cdot u = id$ se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se

$$\mathsf{in} = [L, R]$$
$$\mathsf{out} \cdot L = i_1$$
$$\mathsf{out} \cdot R = i_2$$

e, como

$$\mathsf{F}\ g = \mathsf{B}\ (f, g) = id + g^*$$

o diagrama correspondente a $k \cdot \mathsf{in} = g \cdot (id + k^*)$ iff $k = (\!|g|\!)$. Logo:

$$\mu = (\!|[id, \mathsf{in} \cdot i_2]|\!)$$
$$\equiv \quad \{ \text{ universal-cata (43) } \}$$
$$\mu \cdot \mathsf{in} = [id, \mathsf{in} \cdot i_2] \cdot (id + \mu^*)$$
$$\equiv \quad \{ \ \mathsf{in} = [L, R]\text{ , logo } \mathsf{in} \cdot i_2 = R \text{ ; absorção-+ (22) } \}$$
$$\mu \cdot [L, R] = [id, R \cdot \mu^*]$$
$$\equiv \quad \{ \text{ fusão-+ (20) ; Eq-+ (27) } \}$$
$$\begin{cases} \mu \cdot L = id \\ \mu\ R = R \cdot \mu^* \end{cases}$$
$$\equiv \quad \{ \text{ introdução de variáveis } \}$$
$$\begin{cases} \mu\ (L\ a) = a \\ \mu\ (R\ x) = R\ (\mu^*\ x) \end{cases}$$
$\square$

A cláusula $\mu \cdot L = id$ acima é a lei $\mu \cdot u = id$ que se pede para provar. $\square$

ANEXO — Catálogo de alguns tipos de dados estudados na disciplina.

1. Números naturais:

$$\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}] \tag{E11}$$

Haskell: Int inclui $\mathbb{N}_0$.

2. Listas de elementos em A:

$$\mathsf{T} = A^* \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \tag{E12}$$

Haskell: $[\,a\,]$.

3. Árvores com informação de tipo A nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}\,, Node] \tag{E13}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$.

4. Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Leaf\,, Fork] \tag{E14}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ \ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$.

5. Árvores com informação nos nós e nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Unit\,, Comp] \tag{E15}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$.

6. Árvores de expressão:

$$\mathsf{T} = Expr\ V\ O \qquad \begin{cases} \mathsf{F}\ X = V + O \times X^* \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^* \end{cases} \qquad \mathsf{in} = [Var\,, Op] \tag{E16}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ Expr\ v\ o = Var\ v \mid Op\ (o, [\,Expr\ v\ o\,])$