Cálculo de Programas

2.º Ano de MiEI+LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2017/18

Exame de Recurso — 27 de Junho de 2018
16h00–18h00
Cantina

---

*Este teste consta de **8** questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (2h)

Questão 1 Mostre que a expressão

$$\langle [f\,,h] \cdot (\pi_1 + \pi_1), [g\,,k] \cdot (\pi_2 + \pi_2) \rangle$$

simplifica em $[f \times g\,, h \times k]$.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle [f\,,h] \cdot (\pi_1 + \pi_1), [g\,,k] \cdot (\pi_2 + \pi_2) \rangle \\
= & \qquad \{ \text{ absorção-+ duas vezes } \} \\
& \langle [f \cdot \pi_1\,, h \cdot \pi_1], [g \cdot \pi_2\,, k \cdot \pi_2] \rangle \\
= & \qquad \{ \text{ lei da troca } \} \\
& [\langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle\,, \langle h \cdot \pi_1, k \cdot \pi_2 \rangle] \\
= & \qquad \{ \text{ definição de } \times \text{ duas vezes } \} \\
& [f \times g\,, h \times k]
\end{array}
$$

□

Questão 2 Determine o tipo mais geral da função $\alpha = \langle \pi_2, i_1 \cdot \pi_1 \rangle$ e deduza a partir deste a propriedade grátis, ou natural, de α.

RESOLUÇÃO: $A \xleftarrow{\pi_1} A \times B$ compõe com $A + C \xleftarrow{i_1} A$ dando $A + C \xleftarrow{i_1 \cdot \pi_1} A \times B$. Logo,

$$B \times (A + C) \xleftarrow{\alpha} A \times B$$

Free theorem será então:

$$(g \times (f + h)) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f \times g)$$

Para deduzir esta propriedade bastará construir o diagrama. □

Questão 3 Definindo $p\ (x, y) = x > y$, o cálculo do máximo $m\ (x, y)$ de dois números pode definir-se por

$$m \quad = \quad p \rightarrow \pi_1\ ,\ \pi_2 \tag{E1}$$

Mostre, usando as leis de fusão do condicional de McCarthy (e propriedades elementares dos números naturais) que

$$\mathsf{succ} \cdot m = m \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \tag{E2}$$

se verifica.

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$\begin{array}{ll}
& \mathsf{succ} \cdot m = m \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{(E1) duas vezes} \} \\
& \mathsf{succ} \cdot (p \rightarrow \pi_1\ ,\ \pi_2) = (p \rightarrow \pi_1\ ,\ \pi_2) \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{ as duas leis de fusão do condicional } \} \\
& p \rightarrow \mathsf{succ} \cdot \pi_1\ ,\ \mathsf{succ} \cdot \pi_2 = p \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \rightarrow \pi_1 \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ})\ ,\ \pi_2 \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{ natural-}\pi_1 \text{ e natural-}\pi_2 \ \} \\
& p \rightarrow \mathsf{succ} \cdot \pi_1\ ,\ \mathsf{succ} \cdot \pi_2 = p \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \rightarrow \mathsf{succ} \cdot \pi_1\ ,\ \mathsf{succ} \cdot \pi_2 \\
\Leftarrow & \qquad \{ \text{ Leibniz (lei geral): } x = y \Rightarrow f\ x = f\ y \ \} \\
& p = p \cdot (\mathsf{succ} \times \mathsf{succ}) \\
\equiv & \qquad \{ \text{ introduzindo variáveis; definição de } p \text{, duas vezes } \} \\
& x > y\ \Leftrightarrow\ x + 1 > y + 1 \\
\equiv & \qquad \{ \text{ aritmética } \} \\
& \mathit{true} \\
\Box &
\end{array}$$

$\Box$

Questão 4 Olhando para o hilomorfismo que calcula os movimentos que solucionam o "puzzle" Torres de Hanoi,

$$\begin{array}{l}
\mathit{hanoi}\ (d, 0) = [\,] \\
\mathit{hanoi}\ (d, n+1) = \mathit{hanoi}\ (\neg\ d, n) +\!\!+ [(n, d)] +\!\!+ \mathit{hanoi}\ (\neg\ d, n)
\end{array}$$

pode derivar-se a função que dá o respectivo número de movimentos,

$$\begin{array}{l}
\mathit{nm}\ 0 = 0 \\
\mathit{nm}\ (n+1) = 2 * (\mathit{nm}\ n) + 1
\end{array}$$

isto é:

$$\mathit{nm} = \mathsf{for}\ \mathit{odd}\ 0\ \mathbf{where}\ \mathit{odd}\ n = 2 * n + 1 \tag{E3}$$

Mostre que $\mathit{nm}\ n$ é o número $2^n - 1$. **Sugestão**: defina $k\ n = 2^n - 1$ e resolva a equação $k = \mathsf{for}\ \mathit{odd}\ 0$ usando leis dos catamorfismos e propriedades básicas da aritmética, entre outras que conhece.

RESOLUÇÃO: Seguindo a sugestão, resolve-se a equação $k = \mathsf{for}\ odd\ 0$:

$$k = \mathsf{for}\ odd\ 0$$

$\equiv$ $\{$ $\mathsf{for}\ b\ i = (\![\underline{i}, b]\!)$; $\mathsf{zero}\ \_ = 0$ $\}$

$$k = (\![\mathsf{zero}, odd]\!)$$

$\equiv$ $\{$ universal-cata; $\mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\mathsf{zero}, \mathsf{succ}]$ $\}$

$$k \cdot [\mathsf{zero}, \mathsf{succ}] = [\mathsf{zero}, odd] \cdot (id + k)$$

$\equiv$ $\{$ fusão-+, absorção-+, eq-+ $\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k \cdot \mathsf{zero} = \mathsf{zero} \\ k \cdot \mathsf{succ} = odd \cdot k \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ introduzindo variáveis; definição de odd $\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} k\ 0 = 0 \\ k\ (n+1) = 2 * (k\ n) + 1 \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ definição de k $\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^0 - 1 = 0 \\ 2^{n+1} - 1 = 2\ (2^n - 1) + 1 \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ aritmética $\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 1 = 0 \\ 2^{n+1} - 1 = (2^{n+1} - 2) + 1 \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ aritmética $\}$

$$true$$

$\Box$

$\Box$

Questão 5 Um erro muito frequente no teste deste ano foi terem os alunos definido

$$prof\ (Leaf\ a) = 0$$
$$prof\ (Fork\ (x, y)) = max\ (prof\ x)\ (prof\ y)$$

para calcular a profundidade de uma LTree. Mostre que o catamorfismo $prof$ assim definido é uma função constante (qual?). Determine o gene g tal que $prof = (\!|g|\!)$ e use as leis dos catamorfismos para justificar a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Primeira parte: calcular o gene g de $prof = (\!|g|\!)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} prof\ (Leaf\ a) = 0 \\ prof\ (Fork\ (x, y)) = max\ (prof\ x)\ (prof\ y) \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ remoção de variáveis; defina-se $umax\ (x, y) = max\ x\ y$ $\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} prof \cdot Leaf = \underline{0} \\ prof \cdot Fork = umax \cdot (prof \times prof) \end{array} \right.$$

$\equiv$ $\{$ fusão, absorção e eq-+ $\}$

$$prof \cdot [Leaf, Fork] = [\underline{0}, umax] \cdot (id + prof \times prof)$$

$\equiv$ $\{$ universal-cata para $\mathsf{F}\ f = id + f \times f$ $\}$

$$prof = (\![\underline{0}, umax]\!)$$

$\Box$

Será $prof = \underline{k}$, para algum k? Calculemos:

$$
\begin{array}{ll}
& \underline{k} = (\!|[\underline{0}\,, umax]|\!) \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-cata, } \mathsf{F}\, f = id + f^2 \text{ } \} \\
& \underline{k} \cdot \mathsf{in} = [\underline{0}\,, umax] \cdot (id + \underline{k}^2) \\
\equiv & \quad \{ \text{ fusão-+, absorção-+, eq-+ } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \underline{k} = \underline{0} \\ \underline{k} = umax \cdot (\underline{k} \times \underline{k}) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ introduzindo variáveis } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} k = 0 \\ k = max\ k\ k \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ } max\ k\ k = k \text{ } \} \\
& k = 0 \\
\Box &
\end{array}
$$

Isto é, $prof = \underline{0}$. $\Box$

Questão 6 Considere a seguinte definição da função de Fibonacci (em $\mathbb{N}_0$)

$$fib \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, f] \tag{E4}$$

que recorre à função auxiliar f que é tal que

$$f \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \mathsf{add} \cdot \langle f\,, fib \rangle] \tag{E5}$$

para $\mathsf{in} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}]$ e $\mathsf{add} = \widehat{+}$. Recorra à lei da recursividade mútua, entre outras, para resolver em ordem a x a equação

$$\langle f\,, fib \rangle \cdot \mathsf{in} = x \cdot (id + \langle f\,, fib \rangle) \tag{E6}$$

que mostra como converter $\langle f\,, fib \rangle$ num catamorfismo sobre naturais (ciclo-for).

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \mathsf{add} \cdot \langle f\,, fib \rangle] \\ fib \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, f] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ absorção-+ e cancelamento-} \times \text{ } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \mathsf{add}] \cdot (id + \langle f\,, fib \rangle) \\ fib \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \pi_1 \cdot \langle f\,, fib \rangle] \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ para } \mathsf{F}\, f = id + f \text{ } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} f \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \mathsf{add}] \cdot \mathsf{F}\, \langle f\,, fib \rangle \\ fib \cdot \mathsf{in} = [\underline{1}\,, \pi_1] \cdot \mathsf{F}\, \langle f\,, fib \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ lei da recursividade mútua } \} \\
& \langle f\,, fib \rangle = (\!| \langle [\underline{1}\,, \mathsf{add}], [\underline{1}\,, \pi_1] \rangle |\!) \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-cata } \} \\
& \langle f\,, fib \rangle \cdot \mathsf{in} = \langle [\underline{1}\,, \mathsf{add}], [\underline{1}\,, \pi_1] \rangle \cdot \mathsf{F}\, \langle f\,, fib \rangle
\end{array}
$$

Logo $x = \langle [\underline{1}\,, \mathsf{add}], [\underline{1}\,, \pi_1] \rangle$ isto é, $x = [\langle \underline{1}\,, \underline{1} \rangle\,, \langle \mathsf{add}\,, \pi_1 \rangle]$ pela lei da troca. Daí a versão em ciclo-for (calcular detalhes): $\langle f\,, fib \rangle = \mathsf{for}\ \langle \mathsf{add}\,, \pi_1 \rangle\ (1, 1)$. $\Box$

Questão 7 Suponha que sabe que a propriedade

$$g \cdot \mathsf{in} = id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle \tag{E7}$$

é válida para o gene g do anamorfismo $suffixes = [\![g]\!]$, em listas. Mostre, justificadamente, que $suffixes$ é a função que escreveria em Haskell desta forma:

$$\begin{array}{l} suffixes\ [\,] = [\,] \\ suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t \end{array}$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

$$\begin{array}{cl}
 & suffixes = [\!(g)\!] \\
\equiv & \quad \{ \text{ universal-ana } \} \\
 & \mathsf{out} \cdot suffixes = (id + id \times suffixes) \cdot g \\
\equiv & \quad \{ \ g = id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle \cdot \mathsf{out} \text{ por (E7) e isomorfismo } \mathsf{in}\ /\ \mathsf{out} \ \} \\
 & \mathsf{out} \cdot suffixes = (id + id \times suffixes) \cdot (id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle) \cdot \mathsf{out} \\
\equiv & \quad \{ \text{ isomorfismo } \mathsf{in}\ /\ \mathsf{out} \text{ de novo } \} \\
 & suffixes \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot (id + id \times suffixes) \cdot (id + \langle \mathsf{cons}, \pi_2 \rangle) \\
\equiv & \quad \{ \text{ functor-}+\text{ e absorção-}\times \ \} \\
 & suffixes \cdot \mathsf{in} = \mathsf{in} \cdot (id + \langle \mathsf{cons}, suffixes \cdot \pi_2 \rangle) \\
\equiv & \quad \{ \ \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}]\text{; fusão, absorção e eq-}+ \ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} suffixes \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ suffixes \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{cons} \cdot \langle \mathsf{cons}, suffixes \cdot \pi_2 \rangle \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \text{ introdução de variáveis } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} suffixes\ [\,] = [\,] \\ suffixes\ (\mathsf{cons}\ (h, t)) = \mathsf{cons}\ \langle \mathsf{cons}, suffixes \cdot \pi_2 \rangle\ (h, t) \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \mathsf{cons}\ (xy) = x : y \text{ duas vezes } \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} suffixes\ [\,] = [\,] \\ suffixes\ (h : t) = (h : t) : suffixes\ t \end{array} \right.
\end{array}$$

□

Questão 8 Seja $\mathsf{T}\ X$ um tipo indutivo cuja base é o bifunctor

$$\begin{array}{l} \mathsf{B}\ (X, Y) = X + \mathsf{F}\ Y \\ \mathsf{B}\ (f, g) = f + \mathsf{F}\ g \end{array}$$

onde F é um outro qualquer functor. Uma das leis que se tem de provar para que $\mathsf{T}\ X$ seja o mónade

$$A \xrightarrow{\mathsf{in} \cdot i_1} \mathsf{T}\ A \xleftarrow{(\![[id\,, \mathsf{in} \cdot i_2]]\!)} \mathsf{T}\ (\mathsf{T}\ A) \tag{E8}$$

é a propriedade:

$$\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id \tag{E9}$$

Demonstre (E9).

RESOLUÇÃO: Tem-se:

$$
\begin{array}{ll}
& \mu \cdot \mathsf{T}\ u = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{(E8)}\ \} \\
& (\![[id\,, \mathsf{in} \cdot i_2]]\!) \cdot \mathsf{T}\ u = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{absorção-cata ("map/reduce"); bifunctor dado}\ \} \\
& (\![[id\,, \mathsf{in} \cdot i_2] \cdot (u + \mathsf{F}\ id)]\!) = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{(E8); absorção-}+\text{; } \mathsf{F}\ id = id\ \} \\
& (\![[\mathsf{in} \cdot i_1\,, \mathsf{in} \cdot i_2]]\!) = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{fusão-}+\ \} \\
& (\![\mathsf{in} \cdot [i_1\,, i_2]]\!) = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{reflexão-}+\ \} \\
& (\![\mathsf{in}]\!) = id \\
\equiv & \quad \{\ \text{reflexão-cata}\ \} \\
& true \\
\Box &
\end{array}
$$

$\Box$

ANEXO — Catálogo de tipos de dados estudados na disciplina.

1. Números naturais:

$$\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{0}, \mathsf{succ}] \tag{E10}$$

Haskell: Int inclui $\mathbb{N}_0$.

2. Listas de elementos em A:

$$\mathsf{T} = A^* \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}] \tag{E11}$$

Haskell: $[\,a\,]$.

3. Árvores com informação de tipo A nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}, Node] \tag{E12}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$.

4. Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Leaf, Fork] \tag{E13}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ \ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$.

5. Árvores quaternárias com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{QTree}\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Cell, Block] \tag{E14}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{QTree}\ a = Cell\ \ a \mid Block\ ((\mathsf{QTree}\ a, \mathsf{QTree}\ a), (\mathsf{QTree}\ a, \mathsf{QTree}\ a))$.

6. Árvores com informação nos nós e nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array} \right. \qquad \mathsf{in} = [Unit, Comp] \tag{E15}$$

Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ \ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$.