Cálculo de Programas

2.º Ano de MiEI+LCC (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2016/17

Exame de Recurso — 30 de Junho de 2017
16h00–18h00
Cantina de Gualtar

Este teste consta de ***8*** *questões que valem, cada uma, 2.5 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 12 min.*

PROVA SEM CONSULTA (1h30m)

Questão 1 A função g é tal que a propriedade

$$(id \times \pi_2) \cdot \langle id \times \pi_2, id \times \pi_1 \rangle \cdot g = id \tag{E1}$$

se verifica. Determine o tipo mais geral de g sem calcular a sua definição, e formule a respectiva propriedade grátis.

RESOLUÇÃO: O diagrama mais geral que tipa a propriedade dada é

$$\begin{tikzcd} A \times (C \times B) \arrow[d, "\langle id \times \pi_2, id \times \pi_1 \rangle"'] & (A \times B) \times C \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "id"] \\ (A \times B) \times (A \times C) \arrow[r, "id \times \pi_2"'] & (A \times B) \times C \end{tikzcd}$$

(Detalhes omitidos — justifique). Pelo método habitual chega-se à propriedade natural

$$(f \times (h \times k)) \cdot g = g \cdot ((f \times k) \times h)$$

(Detalhes omitidos — justifique). $\square$

Questão 2 Seja dado um predicado p e uma função f tal que

$$p \cdot f = p \tag{E2}$$

se verifica. Mostre que

$$(p \rightarrow id, f) \cdot (p \rightarrow f, id) = f$$

se verifica sabendo-se que, entre outras leis que conhece, se tem:

$$p \rightarrow (p \rightarrow a, b), (p \rightarrow c, d) = p \rightarrow a, d \tag{E3}$$

$$p \rightarrow a, a = a \tag{E4}$$

RESOLUÇÃO:

$$
\begin{array}{ll}
& (p \rightarrow id, f) \cdot (p \rightarrow f, id) \\
= & \quad \{ \text{ 1ª lei do condicional (31); natural-}id\text{ (1) } \} \\
& p \rightarrow ((p \rightarrow id, f) \cdot f), (p \rightarrow id, f) \\
= & \quad \{ \text{ 2ª lei do condicional (32); natural-}id\text{ (1) } \} \\
& p \rightarrow (p \cdot f \rightarrow f, f \cdot f), (p \rightarrow id, f) \\
= & \quad \{ \ p \cdot f = p \text{ (E2) } \} \\
& p \rightarrow (p \rightarrow f, f \cdot f), (p \rightarrow id, f) \\
= & \quad \{ \text{ lei (E3) acima } \} \\
& p \rightarrow f, f \\
= & \quad \{ \text{ lei (E4) acima } \} \\
& f
\end{array}
$$

$\square$

Questão 3 Considere a função

$$
\begin{array}{l}
sum_9 [\,] = 0 \\
sum_9 (h : t) = \{h + sum_9 t\}_9
\end{array}
$$

que soma todos os números de uma lista de naturais "tirando os noves", onde a operação "noves fora" é definida por

$$\{n\}_9 = n \text{ `}mod\text{` } 9$$

e obedece à propriedade:

$$\{a + \{b\}_9\}_9 = \{a + b\}_9 \tag{E5}$$

Encare sum_9 como um catamorfismo de listas e que mostre, recorrendo às leis dos catamorfismos, que se pode implementar essa mesma função fazendo apenas um cálculo de resto de divisão por 9,

$$sum_9 = \{\_\}_9 \cdot \mathsf{sum} \tag{E6}$$

onde $\mathsf{sum} = (\![\mathsf{zero}, \mathsf{add}]\!)$ e zero, add são funções que conhece.

RESOLUÇÃO: Como

$$
\begin{array}{ll}
& \left\{ \begin{array}{l} sum_9 [\,] = 0 \\ sum_9 (h : t) = \{h + sum_9 t\}_9 \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& sum_9 \cdot \mathbf{in} = [\mathsf{zero}, \{\_\}_9 \cdot \mathsf{add}] \cdot (id + id \times sum_9) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& sum_9 = (\![\mathsf{zero}, \{\_\}_9 \cdot \mathsf{add}]\!)
\end{array}
$$

vamos poder usar fusão-cata:

$$
\begin{array}{ll}
& sum_9 = \{\_\}_9 \cdot \mathsf{sum} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \}
\end{array}
$$

$$\{\_\}_9 \cdot (\![\mathsf{zero}, \mathsf{add}]\!) = (\![\mathsf{zero}, \{\_\}_9 \cdot \mathsf{add}]\!)$$

$\Leftarrow$ { .... }

$$\{\_\}_9 \cdot [\mathsf{zero}, \mathsf{add}] = [\mathsf{zero}, \{\_\}_9 \cdot \mathsf{add}] \cdot (id + id \times \{\_\}_9)$$

$\equiv$ { .... }

$$(\{\_\}_9 \cdot \mathsf{zero} = 0) \wedge (\{\_\}_9 \cdot \mathsf{add} = \{\_\}_9 \cdot \mathsf{add} \cdot (id \times \{\_\}_9))$$

$\equiv$ { .... }

$$\{\_\}_9\ (\mathsf{add}\ (a, b)) = \{\mathsf{add}\ (a, \{b\}_9)\}_9$$

$\equiv$ { .... }

$$\{a + b\}_9 = \{a + \{b\}_9\}_9$$

$\Box$

NB: justifique os cálculos feitos acima. $\Box$

Questão 4 O combinador

$$flip :: (a \to b \to c) \to b \to a \to c$$
$$flip\ f\ x\ y = f\ y\ x$$

troca a ordem dos argumentos de uma função. É fácil de ver que *flip* é um isomorfismo de exponenciais:

$$\begin{array}{ccccccc} (C^B)^A & \cong & C^{A \times B} & \cong & C^{B \times A} & \cong & (C^A)^B \\ f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f} \cdot \mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}} = flip\ f \end{array}$$

Apresente justificações para os passos seguintes do cálculo desse isomorfismo a partir da sua definição ao ponto (*pointwise*):

$$flip\ f\ x\ y = f\ y\ x$$

$\equiv$ { .... }

$$(\mathsf{ap} \cdot (flip\ f \times id))\ (x, y) = (\mathsf{ap} \cdot (f \times id))\ (y, x)$$

$\equiv$ { .... }

$$\mathsf{ap} \cdot (flip\ f \times id) = \mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap}$$

$\equiv$ { .... }

$$flip\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap}}$$

$\equiv$ { .... }

$$flip\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (\overline{\widehat{f}} \times id) \cdot \mathsf{swap}}$$

$\equiv$ { .... }

$$flip\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}$$

RESOLUÇÃO: Ter-se-á:

$$flip\ f\ x\ y = f\ y\ x$$

$\equiv$ { $\mathsf{ap}\ (flip\ f\ x, y) = \mathsf{ap}\ (f\ y, x)$ (84); def-$\times$ (73) ; composição (74) }

$$
\begin{array}{ll}
& (\mathsf{ap} \cdot (\mathit{flip}\ f \times id))\ (x,y) = (\mathsf{ap} \cdot (f \times id))\ (y,x) \\
\equiv & \quad \{\ \mathsf{swap}\ (x,y) = (y,x); \text{extensionalidade (73)}\ \} \\
& \mathsf{ap} \cdot (\mathit{flip}\ f \times id) = \mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap} \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-exp (33)}\ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (f \times id) \cdot \mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{\ \text{isomorfismo: } \overline{(\_)} = (\widehat{\_})^{\circ}\ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathsf{ap} \cdot (\overline{\widehat{f}} \times id) \cdot \mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{\ \text{cancelamento-exp (34)}\ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f} \cdot \mathsf{swap}}
\end{array}
$$

$\square$

Questão 5 A seguinte função

$$
\begin{array}{l}
\mathit{odds}\ 0 = [\,] \\
\mathit{odds}\ (n+1) = (2\ n+1) : \mathit{odds}\ n
\end{array}
$$

lista os n-primeiros ímpares por ordem decrescente. Mostre, recorrendo à lei de recursividade múltipla, que odds é a função

$$\mathit{odds} = \pi_2 \cdot \mathbf{for}\ \mathit{body}\ (1,[\,])\ \mathbf{where}\ \mathit{body}\ (i,x) = (i+2, i : x)$$

RESOLUÇÃO: Seja $\mathit{odd}\ n = 2\ n + 1$. Ter-se-á:

$$\mathit{odds} \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons} \cdot \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle]$$

Por outro lado, $\mathit{odd}\ 0 = 1$ e $\mathit{odd}\ (n+1) = 2\ n + 2 + 1 = 2 + \mathit{odd}\ n$, e assim:

$$\mathit{odd} \cdot \mathsf{in}_{\mathbb{N}_0} = [\mathsf{one}\,, (2+) \cdot \mathit{odd}] = [\mathsf{one}\,, (2+) \cdot \pi_1 \cdot \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle]$$

Por recursividade múltipla — lei (50) — ter-se á de imediato:

$$\langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = (\!|\langle [\mathsf{one}\,, (2+) \cdot \pi_1], [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \rangle|\!)$$

Assim:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = (\!|\langle [\mathsf{one}\,, (2+) \cdot \pi_1], [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \rangle|\!) \\
= & \quad \{\ \text{lei da troca ; } \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \underline{(a,b)} \text{ tal como se provou nas aulas TP}\ \} \\
& \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = (\!|[\underline{(1,[\,])}, \langle (2+) \cdot \pi_1\,, \mathsf{cons} \rangle]|\!) \\
= & \quad \{\ \text{ciclo for: } \mathbf{for}\ b\ i = (\!|[\underline{i}\,, b]|\!)\ \} \\
& \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = \mathbf{for}\ \langle (2+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle\ (1,[\,]) \\
= & \quad \{\ \text{pointwise } \mathit{body} = \langle (2+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle \ \Leftrightarrow\ \mathit{body}\ (i,x) = 2+1, i : x\ \} \\
& \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = \mathbf{for}\ \mathit{body}\ (1,[\,])
\end{array}
$$

Finalmente:

$$
\begin{array}{ll}
& \langle \mathit{odd}, \mathit{odds} \rangle = \mathbf{for}\ \mathit{body}\ (1,[\,]) \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal-}\times\ \} \\
& \pi_2 \cdot (\mathbf{for}\ \mathit{body}\ (1,[\,]) = \mathit{odds}
\end{array}
$$

$\square$

Questão 6 Desenhe o diagrama do seguinte anamorfismo de listas

$$f : \mathsf{BTree}\ A \to A^*$$
$$f = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{BTree}})\!] \tag{E7}$$

onde $\alpha = id + id \times \pi_1$, e mostre que f se pode também escrever como um catamorfismo:

$$f = (\!|\mathsf{in}_{\mathsf{L}ist} \cdot \alpha|\!) \tag{E8}$$

Sugestão: a propriedade grátis de α pode ser-lhe útil.

RESOLUÇÃO: Primeiro a propriedade grátis de $\alpha : A + B \times (C \times D) \to A + B \times C$ (fazer o diagrama):

$$(f + g \times h) \cdot \alpha = \alpha \cdot (f + g \times (h \times j))$$

Será, então (justificar os passos):

$$\begin{array}{ll}
& f = [\!(\alpha \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{BTree}})\!] \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathsf{out}_{\mathsf{List}} \cdot f = \mathsf{F}\ f \cdot \alpha \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{BTree}} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathsf{out}_{\mathsf{List}} \cdot f = (id + id \times f) \cdot \alpha \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{BTree}} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathsf{out}_{\mathsf{List}} \cdot f = \alpha \cdot (id + id \times f \times f) \cdot \mathsf{out}_{\mathsf{BTree}} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f \cdot \mathsf{in}_{\mathsf{B}Tree} = \mathsf{in}_{\mathsf{L}ist} \cdot \alpha \cdot (id + id \times (f \times f)) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& f = (\!|\mathsf{in}_{\mathsf{L}ist} \cdot \alpha|\!)
\end{array}$$

□

Questão 7 Considere o algoritmo de *insertion sort* tal como vem dado na biblioteca List.hs:

$$\begin{array}{l}
iSort = (\!|[\mathsf{nil}, \mathsf{insert}]|\!)\ \mathbf{where} \\
\qquad \mathsf{insert}\ (x, [\,]) = [x] \\
\qquad \mathsf{insert}\ (x, a : l) \\
\qquad\quad \mid x < a = [x, a] +\!\!+\ l \\
\qquad\quad \mid \mathsf{otherwise} = a : (\mathsf{insert}\ (x, l))
\end{array}$$

A função auxiliar $\mathsf{insert} : A \times A^* \to A^*$ pode se construída como um hilomorfismo $\mathsf{insert} = [\![g, h]\!]$ onde

$$\begin{array}{l}
h\ (x, [\,]) = i_1\ [x] \\
h\ (x, a : l) \\
\quad \mid x < a = i_1\ ([x, a] +\!\!+\ l) \\
\quad \mid \mathsf{otherwise} = i_2\ (a, (x, l))
\end{array}$$

Identifique o gene g e complete as reticências do seguinte diagrama desse hilomorfismo, evidenciando o respectivo functor de base:

$$\begin{tikzcd} A \times A^* \arrow[r, "h"] \arrow[d, "insert"'] & \ldots \arrow[d, "id + id \times \mathsf{insert}"] \\ A^* & \ldots \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Justifique informalmente a sua resposta.

RESOLUÇÃO: Faça-se o raciocínio seguinte:

- A cláusula $h\ (x, [\,]) = i_1\ [x]$ implica que h tenha tipo $A \times A^* \rightarrow A^* + X$, para um X a descobrir.
- Esse tipo é confirmado por $h\ (x, a : l) \mid x < a = i_1\ ([x, a] +\!\!+\ l)$.
- Olhando para cláusula otherwise, h deverá ter tipo $A \times A^* \rightarrow Z + A \times (A \times A^*)$, para um dado Z.
- Unificando os dois tipos, teremos

  $$h : A \times A^* \rightarrow A^* + A \times (A \times A^*).$$

  e finalmente o diagrama

  $$\begin{tikzcd} A \times A^* \arrow[r, "h"] \arrow[d, "insert"'] & A^* + A \times (A \times A^*). \arrow[d, "id + id \times \mathsf{insert}"] \\ A^* & A^* + A \times A^* \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

Olhando para os tipos e para a função $iSort$ dada, é imediato $g = [id, \mathsf{cons}]$. Olhando para o diagrama, infere-se o functor $\mathsf{F}\ X = A^* + A \times X$, $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$. $\square$

Questão 8 Recorde a função

$$\begin{array}{l} discollect : (A \times B^*)^* \rightarrow (A \times B)^* \\ discollect\ [\,] = [\,] \\ discollect\ ((a, x) : y) = [(a, b) \mid b \leftarrow x] +\!\!+\ discollect\ y) \end{array}$$

que foi assunto em fichas das aulas práticas desta disciplina. Sabendo que as listas formam um mónade, onde

$$\mu = \mathsf{concat} = (\![[\mathsf{nil}, \mathsf{conc}]]\!) \tag{E9}$$

e

$$\mathsf{conc}\ (x, y) = x +\!\!+\ y \tag{E10}$$

e recordando a lei de absorção-cata (para listas), mostre que a definição acima pode ser calculada a partir de

$$discollect = lstr \bullet id \tag{E11}$$

onde $lstr\ (a, x) = [(a, b) \mid b \leftarrow x]$.

RESOLUÇÃO: Ter-se-á (justificar os cálculos):

$$
\begin{array}{ll}
& \mathit{discollect} = \mathit{lstr} \bullet \mathit{id} \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{discollect} = \mu \cdot (\mathsf{T}\ \mathit{lstr}) \cdot \mathit{id} \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{discollect} = (\![\mathsf{nil}, \mathsf{conc}]\!) \cdot (\mathsf{T}\ \mathit{lstr}) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{discollect} = (\![\mathsf{nil}, \mathsf{conc}] \cdot (\mathit{id} + \mathit{lstr} \times \mathit{id})]\!) \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \mathit{discollect} \cdot [\mathsf{nil}, \mathsf{cons}] = [\mathsf{nil}, \mathsf{conc} \cdot (\mathit{lstr} \times \mathit{discollect})] \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathit{discollect} \cdot \mathsf{nil} = \mathsf{nil} \\ \mathit{discollect} \cdot \mathsf{cons} = \mathsf{conc} \cdot (\mathit{lstr} \times \mathit{discollect}) \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \mathit{discollect}\ [\,] = [\,] \\ \mathit{discollect}\ ((a, x) : y) = [(a, b) \mid b \leftarrow x] +\!\!+\ \mathit{discollect}\ y \end{array} \right. \\
\square &
\end{array}
$$

$\square$

ANEXO — Catálogo de tipos de dados estudados na disciplina.

1. Números naturais:

$$\mathsf{T} = \mathbb{N}_0 \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + X \\ \mathsf{F}\ f = id + f \end{array}\right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{0}\,, \mathsf{succ}] \tag{E12}$$

   Haskell: Int inclui $\mathbb{N}_0$.

2. Listas de elementos em A:

$$\mathsf{T} = A^* \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f \end{array}\right. \qquad \mathsf{in} = [\mathsf{nil}\,, \mathsf{cons}] \tag{E13}$$

   Haskell: $[\,a\,]$.

3. Árvores com informação de tipo A nos nós:

$$\mathsf{T} = \mathsf{BTree}\ A \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = 1 + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array}\right. \qquad \mathsf{in} = [\underline{Empty}\,, Node] \tag{E14}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{BTree}\ a = Empty \mid Node\ (a, (\mathsf{BTree}\ a, \mathsf{BTree}\ a))$.

4. Árvores com informação de tipo A nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{LTree}\ A \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = A + X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + f^2 \end{array}\right. \qquad \mathsf{in} = [Leaf\,, Fork] \tag{E15}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{LTree}\ a = Leaf\ \ a \mid Fork\ (\mathsf{LTree}\ a, \mathsf{LTree}\ a)$.

5. Árvores com informação nos nós e nas folhas:

$$\mathsf{T} = \mathsf{FTree}\ B\ A \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = B + A \times X^2 \\ \mathsf{F}\ f = id + id \times f^2 \end{array}\right. \qquad \mathsf{in} = [\,Unit\,, Comp] \tag{E16}$$

   Haskell: $\mathbf{data}\ \mathsf{FTree}\ b\ a = Unit\ b \mid Comp\ (a, (\mathsf{FTree}\ b\ a, \mathsf{FTree}\ b\ a))$.