Cálculo de Programas

2.º Ano de LCC+LEI (Universidade do Minho)
Ano Lectivo de 2011/12

Exame de recurso — 11 de Julho de 2012
11h00
Salas CPII-201 a 204

---

*Esta prova consta de **10** questões que valem, cada uma, 2 valores. O tempo médio estimado para resolução de cada questão é de 15 min.*

PROVA SEM CONSULTA (2h30m)

Questão 1 Considere a função

$$\mathsf{swap} \cdot (id \times \mathsf{swap})$$

Identifique a sua propriedade natural através de um diagrama e faça a sua dedução analítica.

Questão 2 Sabendo que as igualdades

$$p \rightarrow k, k \;=\; k \tag{1}$$
$$(p? + p?) \cdot p? \;=\; (i_1 + i_2) \cdot p? \tag{2}$$

se verificam, demonstre **uma** das seguintes propriedades do mesmo combinador, à sua escolha:

$$\langle (p \rightarrow f, h), (p \rightarrow g, i) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle \tag{3}$$
$$\langle f, (p \rightarrow g, h) \rangle \;=\; p \rightarrow \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle \tag{4}$$
$$p \rightarrow p \rightarrow a, b, p \rightarrow c, d \;=\; p \rightarrow a, d \tag{5}$$

Questão 3 Considere os isomorfismos

$$f = \mathsf{coswap} \cdot (\mathsf{coswap} + id)$$
$$g = \mathsf{coswap} \cdot (id + \mathsf{coswap})$$

Mostre que f e g são inversas uma da outra, isto é, que $f \cdot g = id$ e que $g \cdot f = id$.

Questão 4 O combinador

$$\mathit{flip} :: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c$$
$$\mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x$$

troca a ordem dos argumentos de uma função. É fácil de ver que *flip* é um isomorfismo de exponenciais:

$$\begin{array}{ccccccc}
(C^B)^A & \cong & C^{A\times B} & \cong & C^{B\times A} & \cong & (C^A)^B \\
f & \mapsto & \widehat{f} & \mapsto & \widehat{f}\cdot\mathsf{swap} & \mapsto & \overline{\widehat{f}\cdot\mathsf{swap}} = \mathit{flip}\ f
\end{array}$$

Apresente justificações para os passos seguintes do cálculo desse isomorfismo a partir da sua definição ao ponto (*pointwise*):

$$\begin{array}{cl}
& \mathit{flip}\ f\ x\ y = f\ y\ x \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{ap}\ (\mathit{flip}\ f\ x, y) = \mathit{ap}\ (f\ y, x) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& (\mathit{ap}\cdot(\mathit{flip}\ f\times \mathit{id}))\ (x,y) = (\mathit{ap}\cdot(f\times \mathit{id}))\ (y,x) \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{ap}\cdot(\mathit{flip}\ f\times \mathit{id}) = \mathit{ap}\cdot(f\times \mathit{id})\cdot\mathsf{swap} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathit{ap}\cdot(f\times \mathit{id})\cdot\mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\mathit{ap}\cdot(\overline{\widehat{f}}\times \mathit{id})\cdot\mathsf{swap}} \\
\equiv & \quad \{ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ \} \\
& \mathit{flip}\ f = \overline{\widehat{f}\cdot\mathsf{swap}}
\end{array}$$

Questão 5 A função

$$\mathit{last}\ p\ n = \mathbf{if}\ n == 0\ \mathbf{then}\ 0\ \mathbf{else\ if}\ p\ n\ \mathbf{then}\ n\ \mathbf{else}\ \mathit{last}\ p\ (n-1)$$

dá como resultado 0 ou o maior número natural que satisfaz o predicado p, por exemplo $\mathit{last}\ ({<}20)\ 35 = 19$. É possível escrever $\mathit{last}\ p$ da forma alternativa seguinte,

$$\begin{array}{l}
\mathit{last}\ p\ 0 = 0 \\
\mathit{last}\ p\ (n+1) = k\ p\ (\mathit{pair}\ p\ n)
\end{array}$$

onde

$$\begin{array}{l}
k\ p\ (x,y) = \mathbf{if}\ p\ x\ \mathbf{then}\ x\ \mathbf{else}\ y \\
\mathit{pair}\ p = \langle \mathit{next}, \mathit{last}\ p\rangle
\end{array}$$

em recursividade múltipla com a função

$$\begin{array}{l}
\mathit{next}\ 0 = 1 \\
\mathit{next}\ (n+1) = \mathsf{succ}\ (\mathit{next}\ n)
\end{array}$$

Mostre, por aplicação da lei de recursividade múltipla, que $\mathit{pair}\ p$ é o ciclo-for

$$\mathit{pair}\ p = \mathsf{for}\ (\mathit{loop}\ p)\ (1,0)$$

onde

$$\mathit{loop}\ p\ (x,y) = (x+1, \mathbf{if}\ p\ x\ \mathbf{then}\ x\ \mathbf{else}\ y)$$

Questão 6 Seja dado um tipo indutivo T com base B, isto é,

$$\mathsf{T}\ f = \llparenthesis\ \mathbf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, id) \rrparenthesis$$

Defina-se agora o chamado *combinador trianglar* de T, $tri\ f$, tal como se segue:

$$tri\ f = \llparenthesis\ \mathbf{in} \cdot \mathsf{B}\ (id, \mathsf{T}\ f) \rrparenthesis$$

Mostre que, para o caso das listas, se tem

$$\begin{array}{l} tri\ f\ [\,] = [\,] \\ tri\ f\ (h : t) = h : (\mathsf{map}\ f\ (tri\ f\ t)) \end{array}$$

para $tri :: (a \rightarrow a) \rightarrow [\,a\,] \rightarrow [\,a\,]$.

Questão 7 No artigo que apresentou na sua *Turing Award Lecture*, John Backus (1924-2007) identificou o seguinte esquema de recursividade funcional, $f = p \rightarrow g, h \cdot \langle i, f \cdot j \rangle$, a que chamou *linear monadic scheme* (lms). Escrito em Haskell, esse esquema corresponde ao combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{lms} :: (a \rightarrow Bool) \rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow ((c, b) \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow a) \rightarrow a \rightarrow b \\ \mathsf{lms}\ p\ g\ h\ i\ j = p \rightarrow g, h \cdot \langle i, f \cdot j \rangle\ \mathbf{where}\ f = \mathsf{lms}\ p\ g\ h\ i\ j \end{array}$$

paramétrico no predicado p e nas funções g, h, i e j.

- Mostre que a função factorial fac é uma instância deste combinador, isto é, resolva a equação $fac = \mathsf{lms}\ p\ g\ h\ i\ j$ em ordem a p, g, h, i e j.
- Mostre que lms corresponde ao hilomorfismo

  $$\mathsf{lms}\ p\ g\ h\ i\ j = \llbracket [g\ , h], (p \rightarrow i_1, i_2 \cdot \langle i, j \rangle) \rrbracket$$

  e represente-o sob a forma de um diagrama que exiba o seu tipo indutivo intermédio:

  $$\mathbf{data}\ \mathsf{Lms}\ a\ c = Stop\ a \mid Next\ (c, \mathsf{Lms}\ a\ c)\ \mathbf{deriving}\ Show$$

Questão 8 Mostre que o anamorfismo g definido pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} {[\mathbb{N}_0]} & 1 + \mathbb{N}_0 \times [\mathbb{N}_0] \arrow[l, "\mathbf{in}"'] \\ \mathbb{N}_0 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "i_2 \cdot (\langle id, id \rangle)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \arrow[u, "id + id \times g"'] \end{tikzcd}$$

é tal que a propriedade

$$\mathsf{map}\ f \cdot g = g \cdot f \tag{6}$$

se verifica.

Questão 9 O functor de tipo LTree forma um mónade cuja unidade u é o construtor $Leaf$ e cuja multiplicação μ é a função

$$join :: \mathsf{LTree}\ (\mathsf{LTree}\ a) \rightarrow \mathsf{LTree}\ a$$
$$join = (\![[id\ , Fork]]\!)$$

Recorra às leis de cálculo de catamorfismos que conhece para mostrar que $join$ satisfaz as duas leis (**Multiplicação** e **Unidade** no formulário) que definem um mónade.

Questão 10 Demonstre a lei *associatividade*-$\bullet/\cdot$

$$(f \bullet g) \cdot h \quad = \quad f \bullet (g \cdot h)$$

válida em qualquer mónade.
