Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.° 7

1. Sabendo que $\mathsf{for}\ f\ i = (\!|\, [\underline{i}\ , f]\,|\!)$ para $\mathsf{F}\ f = id + f$ (naturais), recorra à lei de fusão-cata para demonstrar a propriedade:[1]

$$f \cdot (\mathsf{for}\ f\ i) = \mathsf{for}\ f\ (f\ i) \tag{F1}$$

2. Mostre que a lei da recursividade mútua generaliza a mais do que duas funções, neste caso três:

$$\left\{\begin{array}{l} f \cdot in = h \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ g \cdot in = k \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \\ j \cdot in = l \cdot \mathsf{F}\,\langle f, \langle g, j\rangle\rangle \end{array}\right. \quad \equiv \quad \langle f, \langle g, j\rangle\rangle = (\!|\, \langle h, \langle k, l\rangle\rangle\,|\!) \tag{F2}$$

3. As seguintes funções mutuamente recursivas testam a paridade de um número natural:

$$\left\{\begin{array}{l} impar\ 0 = \mathsf{False} \\ impar\ (n+1) = par\ n \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} par\ 0 = \mathsf{True} \\ par\ (n+1) = impar\ n \end{array}\right.$$

   Assumindo o functor $\mathsf{F}\ f = id + f$, mostre que esse par de definições é equivalente ao sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} impar \cdot \mathsf{in} = h \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par\rangle \\ par \cdot \mathsf{in} = k \cdot \mathsf{F}\ \langle impar, par\rangle \end{array}\right.$$

   para um dado h e k (deduza-os). De seguida, recorra às leis da recursividade mútua e da troca para mostrar que

$$imparpar = \langle impar, par\rangle = \mathsf{for}\ \mathsf{swap}\ (\mathsf{False}, \mathsf{True})$$

4. A seguinte função em Haskell calcula a lista dos primeiros n números naturais por ordem inversa:

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (n+1) : insg\ n \end{array}$$

   Mostre que $insg$ pode ser definida por recursividade mútua tal como se segue,

$$\begin{array}{l} insg\ 0 = [\,] \\ insg\ (n+1) = (fsuc\ n) : insg\ n \\ fsuc\ 0 = 1 \\ fsuc\ (n+1) = fsuc\ n + 1 \end{array}$$

   e, usando a lei de recursividade mútua, derive:

[1] Como complemento desta questão, escreva em sintaxe C os programas correspondentes aos dois lados da igualdade e compare-os informalmente.

$insg = \pi_2 \cdot insgfor$
$insgfor = \mathsf{for}\ \langle (1+) \cdot \pi_1, \mathsf{cons} \rangle\ (1, [\,])$

5. Considere o par de funções mutuamente recursivas

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1\ [\,] = [\,] \\ f_1\ (h : t) = h : (f_2\ t) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_2\ [\,] = [\,] \\ f_2\ (h : t) = f_1\ t \end{array} \right.$$

   Use a lei de recursividade mútua para definir $\langle f_1, f_2 \rangle$ como um catamorfismo de listas (onde o functor de trabalho é $\mathsf{F}\ f = id + id \times f$) e desenhe o respectivo diagrama. Que faz cada uma destas funções f_1 e f_2?

6. Sejam dados os functores elementares seguintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}\ X = \mathbb{Z} \\ \mathsf{F}\ f = id \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{G}\ X = X \\ \mathsf{G}\ f = f \end{array} \right.$$

   Calcule $\mathsf{H}\ f$ e $\mathsf{K}\ f$ para

$$\mathsf{H}\ X = \mathsf{F}\ X + \mathsf{G}\ X \quad \text{e} \quad \mathsf{K}\ X = \mathsf{G}\ X \times \mathsf{F}\ X$$

7. Mostre que, se F e G são functores, então também o serão $\mathsf{F} + \mathsf{G}$ e $\mathsf{F} \times \mathsf{G}$ que a seguir se definem:

$$(\mathsf{F} + \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) + (\mathsf{G}\ X)$$
$$(\mathsf{F} \times \mathsf{G})\ X = (\mathsf{F}\ X) \times (\mathsf{G}\ X)$$

8. Considere o functor

$$\mathsf{T}\ X = X \times X$$
$$\mathsf{T}\ f = f \times f$$

   e as funções

$$\mu = \pi_1 \times \pi_2$$
$$u = \langle id, id \rangle.$$

   Mostre que a propriedade $\mu \cdot \mathsf{T}\ u = id = \mu \cdot u$ se verifica.

9. Considere a função

$$\mathsf{mirror}\ (Leaf\ a) = Leaf\ a$$
$$\mathsf{mirror}\ (Fork\ (x, y)) = Fork\ (\mathsf{mirror}\ y, \mathsf{mirror}\ x)$$

   que "espelha" árvores binárias do tipo LTree (ver fichas anteriores). Comece por mostrar que

$$\mathsf{mirror} = (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap})\, |\!) \qquad \text{(F3)}$$

   desenhando o digrama que representa este catamorfismo.

   Tal como swap, mirror é um isomorfismo de árvores pois é a sua própria inversa:

$$\mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \qquad \text{(F4)}$$

   Complete a seguinte demonstração de (F4):

$$\begin{array}{cl} & \mathsf{mirror} \cdot \mathsf{mirror} = id \\ \equiv & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot (\!|\, \mathsf{in} \cdot (id + \mathsf{swap})\, |\!) = (\!|\, \mathsf{in}\, |\!) \\ \Leftarrow & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & \mathsf{mirror} \cdot \ldots = \ldots \\ \ldots & \quad \{ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \} \\ & (etc) \end{array}$$