Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.° 3

1. Considere o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} (A+B)+C \arrow[r, bend left, "\mathsf{coassocr}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & A+(B+C) \arrow[l, bend left, "\mathsf{coassocl}"] \end{tikzcd}$$

   onde $\mathsf{coassocr} = [id + i_1 \, , i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a coassocl a equação,

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

   isto é

$$\mathsf{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1 \, , i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

   etc. Finalmente, exprima coassocl sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either".

2. O combinador

$$\begin{array}{l} \mathsf{const} \; :: a \to b \to a \\ \mathsf{const} \; a \; b = a \end{array}$$

   está disponível em Haskell para construir funções constantes, sendo habitual designarmos $\mathsf{const} \; k$ por $\underline{k}$, qualquer que seja k. Demonstre a igualdade

$$\underline{(b, a)} \quad = \quad \langle \underline{b}, \underline{a} \rangle \tag{F1}$$

   a partir da propriedade universal do produto e das propriedades das funções constantes que constam do formulário.

3. Considere a função $\mathsf{iso} = \langle ! + !, [id \, , id] \rangle$, onde $! : A \to 1$ designa a única função constante que habita o tipo $A \to 1$.[1]

   (a) Identifique o isomorfismo que ela testemunha, desenhando-a sob a forma de um diagrama de tipos.

   (b) Derive a partir desse diagrama a propriedade (dita *grátis*) de iso,

$$(id \times f) \cdot \mathsf{iso} \quad = \quad \mathsf{iso} \cdot (f + f) \tag{F2}$$

[1] A função $! : A \to 1$ costuma-se designar-se também por função *"bang"*.

(c) Confirme, por cálculo analítico, essa propriedade.

(d) Derive uma definição em Haskell *pointwise* de iso.

4. Deduza o tipo mais geral da função $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$ e infira a respectiva propriedade *grátis* (*natural*) através de um diagrama.

5. Identifique, apoiando a sua resolução num diagrama, qual é a definição da função polimórfica α cuja propriedade natural ("grátis") é

$$(f + h) \cdot \alpha \quad = \quad \alpha \cdot (f + g \times h)$$

6. Para o caso de um *isomorfismo* f, têm-se as equivalências:

$$f \cdot g = h \;\equiv\; g = f^{\circ} \cdot h \tag{F3}$$
$$g \cdot f = h \;\equiv\; g = h \cdot f^{\circ} \tag{F4}$$

Recorra a essas propriedades para mostrar que a igualdade

$$h \cdot \mathsf{distr} \cdot (g \times (id + f)) = k$$

é equivalente à igualdade

$$h \cdot (g \times id + g \times f) = k \cdot \mathsf{undistr}$$

(**Sugestão:** não ignore a propriedade natural (i.e. *grátis*) do isomorfismo distr.)

7. Seja dada uma função $\triangledown$ da qual só sabe duas propriedades: $\triangledown \cdot i_1 = id$ e $\triangledown \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, $\triangledown$ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \triangledown = \triangledown \cdot (f + f)$.

8. A *lei da troca* (identifique-a no formulário) permite-nos exprimir determinadas funções sob duas formas alternativas, conforme desenhado no respectivo diagrama:

$$[\langle f, g\rangle, \langle h, k\rangle] = \langle [f, h], [g, k]\rangle$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "g"'] & A + B & B \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dll, "h"'] \\ C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & D \end{tikzcd}$$

Demonstre esta lei recorrendo às propriedades (e.g. universais) dos produtos e dos coprodutos.

9. Use a lei da troca para exprimir o isomorfismo $\mathsf{undistl} = [i_1 \times id, i_2 \times id]$ sob a forma de um 'split' de alternativas.