Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2019/20 - Ficha nr.° 1

1. A composição de funções define-se, em Haskell, tal como na matemática:

$$(f \cdot g)\ x = f\ (g\ x)$$

   (a) Calcule $(f \cdot g)\ x$ para os casos seguintes:

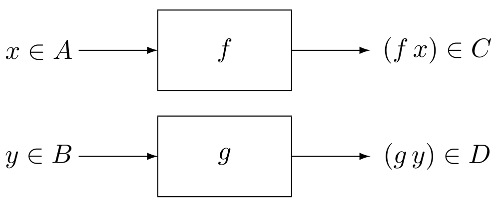
$$\begin{cases} f\ x = 2 * x \\ g\ x = x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} f = \mathsf{succ} \\ g\ x = 2 * x \end{cases} \quad \begin{cases} f = \mathsf{succ} \\ g = \mathsf{length} \end{cases} \quad \begin{cases} g\ (x, y) = x + y \\ f = \mathsf{succ} \cdot (2*) \end{cases}$$

   Anime as composições funcionais acima num interpretador de Haskell.

   (b) Mostre que $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$, quaisquer que sejam f, g e h.

   (c) A função $id :: a \to a$ é tal que $id\ x = x$. Mostre que $f \cdot id = id \cdot f = f$ qualquer que seja f.

2. O diagrama de blocos



descreve o combinador funcional *produto*

$$f \times g = \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle \tag{F1}$$

que capta a aplicação *paralela* e *independente* de duas funções $A \xrightarrow{f} C$ e $B \xrightarrow{g} D$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"'] & A \times B \arrow[d, "f \times g"] \\ C & D & C \times D \end{tikzcd}$$

   (a) Mostre que $(f \times g)\ (x, y) = (f\ x, g\ y)$.

   (b) Mostre ainda que

$$\pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1 \tag{F2}$$
$$\pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2 \tag{F3}$$
$$id \times id = id \tag{F4}$$
$$(f \times g) \cdot (h \times k) = f \cdot h \times g \cdot k \tag{F5}$$

   Desenhe os diagramas destas igualdades e anime-as em Haskell, para f, g, h e k à sua escolha.

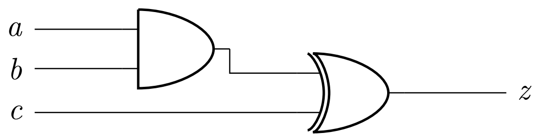
3. Preencha da forma mais genérica possível os “?” do diagrama $\begin{tikzcd} ? & ? \arrow[l, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"'] & ? \arrow[l, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"'] \arrow[ll, bend left, "id"] \end{tikzcd}$

4. Considere as funções seguintes:

   $$f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$$
   $$g = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$$

   Identifique os tipos de f e g. Acompanhe a sua resolução com a construção dos respectivos diagramas.

5. Considere o circuito booleano

   que calcula a função $f\ ((a, b), c) = (a \wedge b) \oplus c$, onde $\oplus$ é a operação “exclusive-or”.

   - Escreva uma definição dessa função $(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \times \mathbb{B} \xrightarrow{f} \mathbb{B}$ que não recorra às variáveis a, b ou c[1] e desenhe o respectivo diagrama.
   - Qual é o tipo da função $g = \langle \pi_1, f \rangle$?

6. Suponha que tem a relação $db_1 \in (Dat \times Jog^*)^*$ de todos os jogos que se efectuaram numa dada competição, organizados por data. Seja ainda $db_2 \in (Jog \times Atl^*)^*$ a indicação, para cada jogo, dos atletas que nele participaram.

   Um comentador desportivo pede-lhe que derive de db_1 e de db_2 a relação, ordenada por nome, das datas em que cada atleta jogou, datas essas também ordenadas:

   $$f : (Dat \times Jog^*)^* \to (Jog \times Atl^*)^* \to (Atl \times Dat^*)^*$$
   $$f\ db_1\ db_2 = \ldots$$

   Mostre que f pode ser escrita numa só linha usando os combinadores $f \cdot g$, $f \times g$, etc que até agora estudou, desde que tenha à sua disposição a seguinte biblioteca de funções **genéricas**:

   - $sort : A^* \to A^*$
     — ordena listas de A segundo uma ordem previamente assumida (sobre A)
   - $collect : (A \times B)^* \to (A \times B^*)^*$
     — agrupa uma sequência de pares segundo os respectivos primeiros elementos, e.g.
     $collect\ [(1, 2), (5, 6), (1, 3)] = [(1, [2, 3]), (5, [6])]$
   - $discollect : (A \times B^*)^* \to (A \times B)^*$
     — inversa da anterior
   - $converse : (A \times B)^* \to (B \times A)^*$
     — troca os elementos de cada par entre si
   - $comp : (A \times B)^* \to (B \times C)^* \to (A \times C)^*$
     — encadeia as sequências de entrada de acordo com os elementos em comum (de tipo B).

   Use um inperpretador de Haskell para verificar que o seu plano para f está bem tipificado, *sem* implementar as funções dadas.

[1] Definições de funções que recorrem a variáveis dizem-se “*pointwise*”; as correspondentes versões sem variáveis dizem-se “*point-free*”.