Álgebra Universal e Categorias

Exame - Época Especial (23 de julho de 2018) — duração: 2h00

1. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Mostre que se S_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$, então $\alpha(S_1)$ é um subuniverso de $\mathcal{B}$.

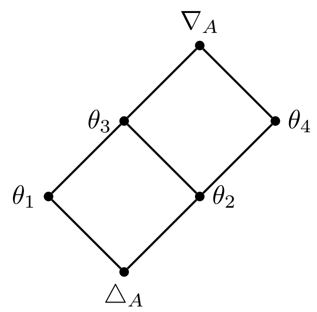
2. Sejam $\mathcal{A} = (A; *^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (B; *^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo (2), onde $A = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $B = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $*^{\mathcal{A}} : A \times A \to A$ é a operação definida por $a *^{\mathcal{A}} b = a + b + ab$, para quaisquer $a, b \in A$, e $*^{\mathcal{B}}$ é a multiplicação usual em B. Seja $\alpha : A \to B$ a aplicação definida por $\alpha(x) = x + 1$, para todo $x \in A$.
   (a) Mostre que a aplicação α é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.
   (b) Mostre que a relação de equivalência $\ker \alpha$ é uma congruência em $\mathcal{A}$.
   (c) Justifique que $\mathcal{A}/\ker \alpha \cong \mathcal{B}$.

3. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	3	2

x	0	1	2	3
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	3	2

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(0, 3), (3, 0)\}$ e $\theta_4 = \Theta(1, 2)$, diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
   (a) O par (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator.
   (b) A álgebra $\mathcal{A}$ não é sudiretamente irredutível e é diretamente indecomponível.
   (c) O conjunto suporte da álgebra $\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_1 \times A/\theta_4; f^{\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4}; g^{\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4})$ tem 6 elementos e $f^{\mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4}(([1]_{\theta_1}, [1]_{\theta_4})) = ([0]_{\theta_1}, [2]_{\theta_4})$.

4. Diga, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira para qualquer categoria $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to C$: Se $g \circ f$ é um monomorfismo, então f e g são monomorfismos.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e X um objeto de $\mathbf{C}$. Mostre que (X, id_X) é um objeto terminal da categoria $\mathbf{C}/X$ dos objetos sobre X.

6. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{0\}$, $\mathbb{N}_0$ e as funções i, f e $id_{\mathbb{N}_0}$ definidas por

$$\begin{array}{rcl} i : \mathbb{N}_0 & \to & \{0\} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & 0 \end{array}, \quad \begin{array}{rcl} id_{\mathbb{N}_0} : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{N}_0 \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Mostre que $(\{0\}, i)$ é um coigualizador de f e $id_{\mathbb{N}_0}$.

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um epimorfismo, então $(B, (\mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B))$ é uma soma amalgamada de (f, f).

8. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor. Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete inversos esquerdos.

Cotação: 1.(1.75); 2.(2.0+1.75+0.75); 3.(1.25+1.25+1.25); 4.(1.25); 5.(2.0); 6.(2.5); 7.(2.25); 8.(2.0).