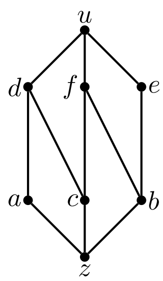
Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2015/2016

Álgebra Universal e Categorias

Exame Época especial (25 de julho de 2016) — duração: 2 horas

1. (a) Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ o reticulado representado pelo diagrama de Hasse seguinte



Dê exemplo de subuniversos S_1 e S_2 de $\mathcal{R}$, cada qual com dois elementos e tais que $S_1 \cup S_2$ não é subuniverso de $\mathcal{R}$. Determine $Sg^{\mathcal{R}}(S_1 \cup S_2)$.

(b) Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1; \wedge_1, \vee_1)$, $\mathcal{R}_2 = (R_2; \wedge_2, \vee_2)$ e $\mathcal{R}_3 = (R_3; \wedge_3, \vee_3)$ reticulados e $\alpha : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ e $\beta : \mathcal{R}_2 \to \mathcal{R}_3$ homomorfismos.

i. Mostre que se S é um subuniverso de $\mathcal{R}_1$, então $\alpha(S)$ é um subuniverso de $\mathcal{R}_2$.

ii. Mostre que $\beta \circ \alpha$ é um homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_3$.

2. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ é a operação definida por

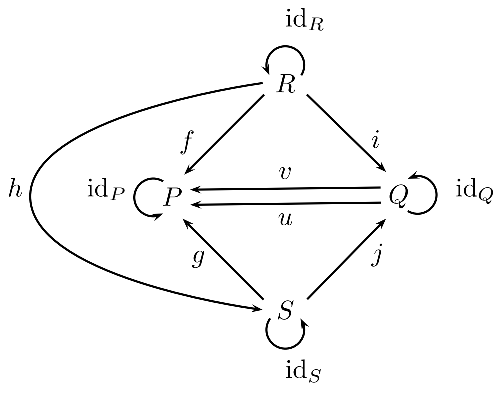
x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

(a) Determine $\theta(a, b)$ e $\theta(a, d)$. Justifique que $(\theta(a, b), \theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

3. Considere os operadores H, I e P. Mostre que HIP é um operador de fecho.

4. Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte



onde $f = u \circ i = v \circ i = g \circ h$,
$g = u \circ j = v \circ j$,
$i = j \circ h$.

Indique, caso exista, um igualizador de u e v.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

6. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria com um objeto inicial I. Mostre que todo o $\mathbf{C}$-morfismo $h : X \to I$ é invertível à direita.

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um epimorfismo, então $(B, (\mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B))$ é uma soma amalgamada de (f, f).

8. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor. Mostre que se F é fiel, então F reflete epimorfismos.

Cotação: 1.(1,5+2.0+2.0); 2.(1.75+1.75); 3.(1.75); 4.(1.5); 5.(1.75); 6.(2.0); 7.(2.0); 8.(2.0).