Resolução do 2º teste de AUC

2023/2024

Nota Preliminar

Não há qualquer garantia de que as resoluções estejam totalmente corretas.

Grupo I - Perguntas de V/F

1. a) Toda a congruência na álgebra $\mathcal{O}_6$ é núcleo de um homomorfismo com domínio igual a $\mathcal{O}_6$.

Resposta: A afirmação é **verdadeira**. Dada uma congruência θ numa álgebra qualquer, ela é sempre núcleo do homomorfismo natural $\pi_\theta \colon A \to A/\theta$ dado por $a \mapsto [a]_\theta$.

b) A álgebra $\mathcal{O}_6 \times O_6$ é diretamente indecomponível.

Resposta: A afirmação é **falsa**. Isto é análogo a perguntar: "O número 4×4 é primo?" — Não, não é primo porque é um produto de dois fatores e nenhum desses fatores é 1. Do mesmo modo, $\mathcal{O}_6 \times O_6$ é o produto de duas álgebras não-triviais [1], pelo que não é diretamente *indecomponível*.

c) Se (θ, θ') é um par de congruências-fator de $\mathcal{M}_3$, então $\theta = \Delta_{M_3}$ ou $\theta' = \Delta_{M_3}$.

Resposta: A afirmação é **verdadeira**. Como M_3 possui 5 elementos e 5 é um número primo, a álgebra $\mathcal{M}_3$ é diretamente indecomponível. Como tal, o único par de congruências-fator é $(\Delta_{M_3}, \nabla_{M_3})$. Logo, uma das congruências θ ou θ' tem de coincidir com Δ_{M_3}.

d) Toda a álgebra diretamente indecomponível é subdiretamente irredutível.

Resposta: A afirmação é **falsa**. Vimos nas aulas que uma cadeia com 3 elementos é diretamente indecomponível (pelo facto de 3 ser um número primo) e, no entanto, não é subdiretamente irredutível.

e) Existe um homomorfismo $\alpha : \mathcal{O}_6 \to \mathcal{M}_3$ tal que $\ker(\alpha) = \Delta_{O_6}$.

Resposta: A afirmação é **falsa**. Se o núcleo de α fosse a congruência trivial, então α seria uma aplicação injetiva. Isso é impossível porque $|M_3| = 5 > 6 = |O_6|$; ou seja, é impossível existir uma aplicação injetiva se o conjunto de chegada tiver menos elementos que o conjunto de partida.

f) Seja $\mathcal{N}$ o monóide $(\mathbb{N}_0, \times, 1)$, onde $\times$ denota a multiplicação de números naturais. Em $\mathcal{N}$, visto como uma categoria, 0 é um monomorfismo.

Resposta: A afirmação é **falsa**. Nesta categoria, os morfismos são os números naturais (incluindo o 0) e a composição é dada pela multiplicação. Sendo assim, um número n é um monomorfismo se $n \times m = n \times k \Rightarrow m = k$. Portanto, 0 não é um monomorfismo, visto que $0 \times 1 = 0 \times 2$ e, no entanto, $1 \neq 2$.

[1] Uma álgebra diz-se *trivial* se o seu conjunto suporte tiver apenas um elemento.

Grupo II - Justificar se é verdade

Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira.

2. Seja $\theta = \Theta(a,d) \in \operatorname{Con}(\mathcal{O}_6)$. A álgebra $\mathcal{O}_6/\theta$ é trivial.

Resolução: A álgebra $\mathcal{O}_6/\theta$ é trivial se e só se $\theta = \nabla_{O_6}$, isto é, se e só se $x\,\theta\,y$ para todos os $x, y \in O_6$. Temos então de determinar $\Theta(a,d)$.

Por definição, $\Theta(a,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{O}_6$ que contém $\{(a,d)\}$. Além disso, $\Theta(a,d)$ é uma relação de equivalência (é reflexiva, simétrica e transitiva) e satisfaz a propriedade de substituição: para quaisquer x, y, z, $w \in O_6$, se $x\,\theta\,y$ e $z\,\theta\,w$, então:

$$\begin{cases} (x \wedge' z)\;\theta\;(y \wedge' w) \\ (x \vee' z)\;\theta\;(y \vee' w) \end{cases}$$

Uma vez que θ é reflexiva, temos $\triangle_{O_6} \subseteq \theta$. Como $(a,d) \in \theta$ e θ é simétrica, também temos $(d,a) \in \theta$. Atendendo a que $(a,d), (c,c) \in \theta$ e θ satisfaz a propriedade de substituição,

$$(a,d),\,(c,c) \in \theta \Rightarrow \begin{cases} (a \wedge' c)\;\theta\;(d \wedge' c) \Rightarrow 0\,\theta\,c \\ (a \vee' c)\;\theta\;(d \vee' c) \Rightarrow 1\,\theta\,d \end{cases}$$

ou seja, $(0,c), (1,d) \in \theta$. Consequentemente, por simetria, $(c,0), (d,1) \in \theta$.

Novamente pela propriedade de substituição,

$$(a,d),\,(b,b) \in \theta \Rightarrow \begin{cases} (a \wedge' b)\;\theta\;(d \wedge' b) \Rightarrow a\,\theta\,0 \\ (a \vee' b)\;\theta\;(d \vee' b) \Rightarrow b\,\theta\,1 \end{cases}$$

ou seja, $(a,0), (b,1) \in \theta$. Consequentemente, por simetria, $(0,a), (1,b) \in \theta$. Logo, até ao momento, já sabemos que:

$$\triangle_{O_6} \cup \{(a,0),(0,a),(a,d),(d,a),(b,1),(1,b),(c,0),(0,c),(d,1),(1,d)\} \subseteq \theta.$$

Por transitividade e simetria, decorre ainda que

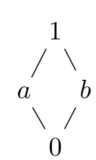
$$(a,c),(c,a),(a,1),(1,a),(b,d),(d,b),(d,0),(0,d) \in \theta.$$

Por transitividade uma vez mais,

$$(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(c,1),(1,c),(b,c),(c,b) \in \theta.$$

Concluímos que $\theta = O_6 \times O_6 = \nabla_{O_6}$, pelo que a álgebra $\mathcal{O}_6/\theta$ é trivial.

3. Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ o reticulado dado pelo diagrama



Sejam θ e θ' relações de equivalência em R dadas pelas partições $\{\{a,0\},\{b,1\}\}$ e $\{\{b,0\},\{a,1\}\}$, respetivamente. As relações θ e θ' formam um par de congruências-fator de $\mathcal{R}$.

Resolução: Em primeiro lugar, para as relações de equivalência θ e θ' formarem um par de congruências-fator, elas têm de ser congruências. E de facto são, pois é verificada a propriedade de substituição:

- $a\,\theta\,0$, $b\,\theta\,1$ e $(a \wedge b)\;\theta\;(0 \wedge 1)$;
- $a\,\theta\,0$, $b\,\theta\,1$ e $(a \vee b)\;\theta\;(0 \vee 1)$;
- $b\,\theta'\,0$, $a\,\theta'\,1$ e $(b \wedge a)\;\theta'\;(0 \wedge 1)$;
- $b\,\theta'\,0$, $a\,\theta'\,1$ e $(b \vee a)\;\theta'\;(0 \vee 1)$.

Adicionalmente, as congruências θ e θ' formam um par de congruências-fator de $\mathcal{R}$ se:

1. $\theta \cap \theta' = \Delta_R$;
2. $\theta \vee \theta' = \nabla_R$;
3. $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$.

Como se tem

- $\theta = \Delta_R \cup \{(a,0),(0,a),(b,1),(1,b)\}$;
- $\theta' = \Delta_R \cup \{(b,0),(0,b),(a,1),(1,a)\}$.

a propriedade 1. decorre imediatamente. Para provar a propriedade 2., note-se que

$$\theta \cup \theta' = \Delta_R \cup \{(a,0),(0,a),(b,1),(1,b),(b,0),(0,b),(a,1),(1,a)\}.$$

Como $\theta \cup \theta' \subseteq \theta \vee \theta'$, por transitividade decorre que (a,b), $(b,a) \in \theta \vee \theta'$, logo $\theta \vee \theta' = \nabla_R$.
Por um motivo análogo, como $\theta \cup \theta' \subseteq \theta \circ \theta'$ e $\theta \cup \theta' \subseteq \theta' \circ \theta$, o ponto 3. também se verifica.
Logo, θ e θ' são de facto congruências-fator em $\mathcal{R}$.

4. Existe mergulho subdireto de $\mathcal{O}_6$ em $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, onde $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ são as cadeias com 2 e 3 elementos, respetivamente.

Resolução: Como $|\mathcal{O}_6| = 6 = |\mathbf{2} \times \mathbf{3}|$ e um mergulho subdireto é um monomorfismo, se existir um mergulho subdireto de $\mathcal{O}_6$ em $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ ele terá de ser sobrejetivo, logo um isomorfismo. No entanto, $\mathcal{O}_6$ e $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ não são reticulados isomorfos. De facto, em $\mathcal{O}_6$ há exatamente duas cadeias de comprimento 4, ao passo que em $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$ há três cadeias de comprimento 4.

5. Seja $\mathcal{C}$ a categoria definida pelos diagramas seguintes:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ são epimorfismos.

Resolução: O morfismo f é um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $a, b \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$, $a \circ f = b \circ f$ implicar $a = b$. Ora, existe um único morfismo que pode ser composto à esquerda com f, a saber id_B. Logo, f é um epimorfismo. O mesmo raciocínio pode ser aplicado a g. No caso de h, há dois morfismos que podem ser compostos à esquerda com h, a saber id_C e g. Contudo, $\mathrm{id}_C \circ h \neq g \circ h$. Logo, a condição $a \circ h = b \circ h$ implica necessariamente $a = b$. Por isso, é verdade que todos os morfismos de $\mathcal{C}$ são epimorfismos.

Grupo III - Demonstrações

Demonstre as seguintes afirmações.

6. Sejam $\mathcal{R} = (R, \wedge, \vee)$ um reticulado e θ uma congruência em $\mathcal{R}$. Para cada $x \in R$, a classe de equivalência $[x]_\theta$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{R}$.

Resolução: Em primeiro lugar, dado $x \in R$, é evidente que $[x]_\theta \subseteq \mathcal{R}$. Basta então mostrar que, dados $y, z \in [x]_\theta$, se tem $y \wedge z \in [x]_\theta$ e $y \vee z \in [x]_\theta$. Sejam então $y, z \in R$ tais que $y \, \theta \, x$ e $z \, \theta \, x$. Como θ é uma congruência, a propriedade de substituição garante que $(y \wedge z) \; \theta \; (x \wedge x)$. Decorre assim que $(y \wedge z) \; \theta \; x$ e, portanto, $y \wedge z \in [x]_\theta$. A justificação para a operação $\vee$ é análoga.

7. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. $\Delta_{\mathcal{A}}$ é produto sub-directo de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Resolução: Em primeiro lugar, note-se que $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$. Por definição, $\Delta_{\mathcal{A}}$ é um produto sub-direto de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ se:

1. $\Delta_{\mathcal{A}}$ é uma sub-álgebra de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$;
2. $p_1(\Delta_A) = A$;
3. $p_2(\Delta_A) = A$.

Suponhamos que $\mathcal{A} = (A; F)$ é uma álgebra de tipo (O, τ). Para provar 1., basta verificar que Δ_A é um sub-universo de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Para esse efeito, tomemos $f \in O_n$ e $(x_1, x_1), \ldots, (x_n, x_n) \in \Delta_A$. Então, por definição de álgebra produto,

$$f((x_1, x_1), \ldots, (x_n, x_n)) = (f(x_1, \ldots, x_n), f(x_1, \ldots, x_n)) \in \Delta_A.$$

Por conseguinte, Δ_A é um sub-universo de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ e, como tal, quando equipado com as operações de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, torna-se uma sub-álgebra.

Resta apenas justificar 2., uma vez que a justificação de 3. é igual. Como $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\} \subseteq A \times A$, decorre que $p_1(\Delta_A) = \{a \mid a \in A\}$. Portanto, $p_1(\Delta_A) = A$ (e analogamente para p_2), o que conclui a demonstração.

8. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f : A \to B$, $g : B \to C$ morfismos em $\mathcal{C}$. Se $g \circ f$ é invertível à esquerda, então f é invertível à esquerda.

Resolução: Se $g \circ f \colon A \to C$ é invertível à esquerda, então existe um morfismo $k \colon C \to A$ tal que $k \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_A$. Como, numa categoria, a composição é associativa, decorre que $(k \circ g) \circ f = id_A$. Logo, $k \circ g \colon B \to A$ é uma inversa esquerda de f. Portanto, f é invertível à esquerda.