Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
24 de maio de 2023

Álgebra Universal e Categorias

3º teste

duração: 1h45min

1. (a) Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um morfismo invertível à direita, então f é um epimorfismo.
   (b) Dê exemplo de uma categoria na qual nem todo o epimorfismo é invertível à direita.
2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e T_1, T_2 objetos de $\mathbf{C}$. Mostre que se T_1 e T_2 são objetos terminais, então T_1 e T_2 são isomorfos.
3. Sejam A, B, P objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $\hom_{\mathbf{C}}(A, B) \neq \emptyset$ e $p_A : P \to A$ e $p_B : P \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, então p_A é invertível à direita.
4. Sejam A e B conjuntos, $f : A \to B$ e $g : A \to B$ funções, $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ e $i : I \to A$ a função definida por $i(x) = x$, para todo $x \in I$. Mostre que, na categoria **Set**, (I, i) é um igualizador de f e g.
5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um epimorfismo, então $(B, (\mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B))$ é uma soma amalgamada de (f, f).
6. (a) Seja $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ o funtor de **Set** em **Set**, onde $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Obj}(\textbf{Set})$ é a função que a cada objeto X de **Set** associa o conjunto $F_{Ob}(X) = \{1, 2\}$ e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\textbf{Set}) \to \mathrm{Mor}(\textbf{Set})$ é a função que a cada **Set**-morfismo $f : X \to Y$ associa o morfismo $F_{hom}(f) = \mathrm{id}_{\{1,2\}}$.
   Diga, justificando, se:
      i. o funtor F é fiel e se é pleno.
      ii. o funtor F reflete morfismos invertíveis à esquerda.
   (b) Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e F um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$. Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete morfismos invertíveis à esquerda.

Cotações: $1.(2,5+1,5); 2.(2,5); 3.(3,0); 3.(3,5); 4.(3,0); 5.(1,5+1,0+1,5).$