Álgebra Universal e Categorias

3º teste

duração: 1h45min

1. (a) Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo de $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um morfismo invertível à direita, então f é um epimorfismo.

Suponhamos que f é invertível à direita. Então f tem um inverso direito, isto é, existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$. Pretndemos mostrar que f é um epimorfismo, ou seja, pretende-se provar que, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : B \to C$,

$$i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = j.$$

De facto, da hipótese segue que para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : B \to C$

$$\begin{array}{rcll} i \circ f = j \circ f & \Rightarrow & (i \circ f) \circ g = (j \circ f) \circ g & \\ & \Rightarrow & i \circ (f \circ g) = j \circ (f \circ g) & \text{(por associatividade)} \\ & \Rightarrow & i \circ id_B = j \circ id_B & (g \text{ é inverso direito de } f) \\ & \Rightarrow & i = j. & \end{array}$$

Logo, f é cancelável à direita, ou seja, f é um epimorfismo.

(b) Dê exemplo de uma categoria na qual nem todo o epimorfismo é invertível à direita.

Na categoria $\mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r, "f"] & B \arrow[loop right, "id_B"] \end{tikzcd}$$

o morfismo f é um epimorfismo, pois, para quaisquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $i, j \in \hom_{\mathbf{C}}(B, X)$

$$i \circ f = j \circ f \Rightarrow i = id_B = j$$

(note-se que id_B é o único morfismo com domínio B). O morfismo f não é invertível à direita, uma vez que não existe qualquer morfismo $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$; de facto, não existe qualquer morfismo de B em A.

2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e T_1, T_2 objetos de $\mathbf{C}$. Mostre que se T_1 e T_2 são objetos terminais, então T_1 e T_2 são isomorfos.

Sejam T_1 e T_2 objetos terminais de $\mathbf{C}$. Uma vez que T_2 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo $f : T_1 \to T_2$. Como T_1 é um objeto terminal, existe um e um só morfismo $g : T_2 \to T_1$. Logo $g \circ f : T_1 \to T_1$ e $f \circ g : T_2 \to T_2$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Uma vez que T_1 é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é uma categoria, $id_{T_1} : T_1 \to T_1$ é um morfismo de $\mathbf{C}$. Então, atendendo a que os morfismos id_{T_1} e $g \circ f$ são elementos de $\hom(T_1, T_1)$ e $|\hom(T_1, T_1)| = 1$ (pois T_1 é um objeto terminal), conclui-se que $g \circ f = id_{T_1}$. De modo análogo, conclui-se que $f \circ g = id_{T_2}$. Logo f é invertível à direita e à esquerda e, portanto, f é um isomorfismo. Por conseguinte, T_1 e T_2 são objetos isomorfos.

3. Sejam A, B, P objetos de uma categoria $\mathbf{C}$ tais que $\hom_{\mathbf{C}}(A, B) \neq \emptyset$ e $p_A : P \to A$ e $p_B : P \to B$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, então p_A é invertível à direita.

Admitamos que $(P; (p_A, p_B))$ é um produto de A e B. Então

(i) $p_A : P \to A$ e $p_B : P \to B$ são $\mathbf{C}$-morfismos;

(ii) para cada objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f_A : X \to A$ e $f_B : X \to B$, existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to P$ tal que $p_A \circ u = f_A$ e $p_B \circ u = f_B$.

Pretende-se mostrar que p_A é invertível à direita, isto é, pretende-se provar que existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : A \to P$ tal que $p_A \circ g = \mathrm{id}_A$.

Uma vez que $\hom(A, B) \neq \emptyset$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h : A \to B$. Atendendo a que $\mathbf{C}$ é uma categoria e A é um objeto de $\mathbf{C}$, $\mathrm{id}_A : A \to A$ é um morfismo de $\mathbf{C}$. Assim, tem-se o seguinte diagrama em $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "h"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B \end{tikzcd}$$

Então, por (ii), existe um e um só $\mathbf{C}$-morfismo $u : A \to P$ tal que $p_A \circ u = \mathrm{id}_A$ e $p_B \circ u = h$. Dado que existe o morfismo $u : A \to P$ tal que $p_A \circ u = \mathrm{id}_A$, conclui-se que p_A é invertível à dieita.

4. Sejam A e B conjuntos, $f : A \to B$ e $g : A \to B$ funções, $I = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$ e $i : I \to A$ a função definida por $i(x) = x$, para todo $x \in I$. Mostre que, na categoria **Set**, (I, i) é um igualizador de f e g.

   O par (I, i) é um igualizador de f e g se:

   (1) i é um **Set**-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$;

   (2) para cada $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer morfismo $j : X \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$, existe um, e um só, morfismo, $u : X \to I$ tal que $i \circ u = j$.

   Mostremos as confições (1) e (2).

   (1) A coleção de morfismos de **Set** é a classe de todas as funções entre conjuntos. Então, uma vez que i é uma função de I em A, i é um **Set**-morfismo de I em A, pois. Considerando a definição do conjunto I, a prova de $f \circ i = g \circ i$ é imediata, pois $f \circ i$ e $g \circ i$ são funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para qualquer $x \in I$, tem-se

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x) = g(x) = g(i(x)) = (g \circ i)(x).$$

   (2) Note-se que se X é um objeto de $\mathbf{C}$ e $j : X \to A$ é um C-morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, então, para todo $x \in X$, tem-se $f(j(x)) = g(j(x))$, pelo que $j(x) \in I$. Assim, pode-se definir a função

$$\begin{array}{rcl} u : X & \to & I \\ x & \mapsto & j(x) \end{array}$$

   A respeito desta função, é simples verificar que $i \circ u = j$, pois tratam-se de funções com o mesmo domínio e conjunto de chegada e, para todo $x \in X$, $(i \circ j)(x) = i(j(x)) = j(x)$. Além disso, a função u é a única função $u' : X \to I$ que satisfaz $i \circ u' = j$; de facto, se admitirmos que existe uma outra função $v : X \to I$ tal que $i \circ v = j$, tem-se $(i \circ v)(x) = j(x)$, para todo $x \in X$, donde $v(x) = j(x) = u(x)$ e, portanto, as funções u e v são a mesma.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo em $\mathbf{C}$. Mostre que se f é um epimorfismo, então $(B, (\mathrm{id}_B, \mathrm{id}_B))$ é uma soma amalgamada de (f, f).

   Admitamos que $f : A \to B$ é epimorfismo. Pretende-se mostrar que $(B, (id_B, id_B))$ é uma soma amalgamada de (f, f), ou seja, pretende-se provar que:

   (1) $id_B \circ f = id_B \circ f$;

   (2) para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : B \to X$ tais que $i \circ f = j \circ f$, existe um, e um só morfismo, $u : B \to X$ tal que $u \circ id_B = i$ e $u \circ id_B = j$.

   Claramente tem-se (1), pelo que resta provar (2). Considerando $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $i, j : B \to X$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $i \circ f = j \circ f$, segue que $i = j$, uma vez que f é cancelável à direita. Então, considerando $u : B \to X$ tal que $u = i$, tem-se

$$u \circ id_B = i \circ id_B = i = j.$$

   Além disso, se $v : B \to X$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $v \circ id_B = i$ e $v \circ id_B = j$, tem-se $v = i = j$ e, portanto, $u = v$. Logo tem-se (2).

6. (a) Seja $F = (F_{Ob}, F_{hom})$ o funtor de **Set** em **Set**, onde $F_{Ob} : \mathrm{Obj}(\mathbf{Set}) \to \mathrm{Obj}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada objeto X de **Set** associa o conjunto $F_{Ob}(X) = \{1, 2\}$ e $F_{hom} : \mathrm{Mor}(\mathbf{Set}) \to \mathrm{Mor}(\mathbf{Set})$ é a função que a cada **Set**-morfismo $f : X \to Y$ associa o morfismo $F_{hom}(f) = \mathrm{id}_{\{1,2\}}$.
   Diga, justificando, se:

   i. o funtor F é fiel e se é pleno.

   Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias. Um funtor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ diz-se:

- um funtor ideal se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para quaisquer $f, g : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

- um funtor pleno se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $g : F(X) \to F(Y) \in \text{Mor}(\mathbf{D})$, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $f : X \to Y$ tal que $F(f) = g$.

Uma vez que as funções seguintes

$$\begin{array}{rcl} f:\{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 2 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g:\{1\} & \to & \{2,3\} \\ 1 & \mapsto & 3 \end{array}$$

são **Set**-morfismos tais que $f \neq g$ e $F(f) = id_{\{1,2\}} = F(g)$, concluímos que o funtor F definido no enunciado não é um funtor fiel.

Considerando que a função

$$\begin{array}{rcl} g : F(\{3\}) & \to & F(\{3\}) \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 2 \end{array}$$

é um **Set**-morfismo ($F(\{3\}) = \{1, 2\}$) e não existe qualquer **Set**-morfismo $f : \{3\} \to \{3\}$ tal que $F(f) = g$, pois $g \neq id_{\{1,2\}}$, concluímos que o funtor não é pleno.

ii. o funtor F reflete morfismos invertíveis à esquerda.

O funtor F reflete morfismos invertíveis à esquerda se, para qualquer **Set**-morfismo $f : X \to Y$,

$$F(f) \text{ é invertível à esquerda } \Rightarrow f \text{ é invertível à esquerda.}$$

Na categoria **Set**, os morfismos invertíveis à esquerda são as funções injetivas com domínio não vazio. Então o **Set**-morfismo

$$\begin{array}{rcl} f : \{2,3\} & \to & \{4\} \\ 2 & \mapsto & 4 \\ 3 & \mapsto & 4 \end{array}$$

não é invertível à esquerda (pois não é uma função injetiva) e $F(f) = id_{\{1,2\}}$ é invertível à esquerda (pois é uma função injetiva com domínio não vazio). Logo o funtor F não reflete morfismos invertíveis à esquerda.

(b) Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias e F um funtor de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$. Mostre que se F é um funtor fiel e pleno, então F reflete morfismos invertíveis à esquerda.

Mostremos que se F é fiel e pleno, então F reflete morfismos invertíveis à esquerda. Seja $f : A \to B$ um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é invertível à esquerda. Então existe um $\mathbf{D}$-morfismo $g' : F(B) \to F(A)$ tal que $g' \circ F(f) = id_{F(A)}$. Uma vez que F é pleno, existe um $\mathbf{C}$-morfismo $g : B \to A$, tal que $F(g) = g'$. Por conseguinte, $F(g) \circ F(f) = id_{F(A)}$, donde $F(g \circ f) = F(id_A)$. Então, atendendo a que F é fiel, vem que $g \circ f = id_A$ e, portanto, f é invertível à esquerda. Logo F reflete morfismos invertíveis à esquerda.