Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
26 de abril de 2023

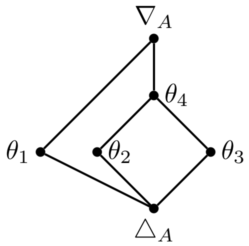
Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h30min | tolerância: 10min

1. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Considere a aplicação $\alpha : A \to A/\theta$ definida por $\alpha(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$.
   (a) Mostre que α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta$.
   (b) Mostre que $\ker \alpha = \theta$. Justifique que α é um monomorfismo se e só se $\theta = \triangle_A$.

2. (a) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo digrama de Hasse



   e tal que $\theta_1 \circ \theta_4 = \theta_4 \circ \theta_1$.
      i. Justifique que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível e indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.
      ii. Diga, justificando, se os reticulados $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_1)$ e $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_3)$ são isomorfos.
   (b) Dê um exemplo de, ou justifique que não existe um exemplo de:
      i. Uma álgebra subdiretamente irredutível que não seja diretamente indecomponível.
      ii. Uma álgebra diretamente indecomponível que não seja subdiretamente irredutível.

3. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que:
   (a) HS é um operador de fecho.
   (b) $HSH = HS$.

4. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas pelos diagramas seguintes

$$\mathbf{C} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[loop above, distance=4em, "h"] \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathbf{D} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, "h'"] & Y \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Y"] \end{tikzcd}$$

   onde $h \neq id_A$ e $h = g \circ f$.
   (a) Justifique que $g \circ f \circ g = g$ e $h \circ h = h$.
   (b) Defina a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ por meio de um diagrama.

Cotações: $1.(2,5+2,5); 2.(2,5+1,75+1,25+1,25); 3.(2,5+2,0); 4.(1,75+2,0)$.