Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
26 de abril de 2023

Álgebra Universal e Categorias

2º teste

duração: 1h30min | tolerância: 10min

1. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Considere a aplicação $\alpha : A \to A/\theta$ definida por $\alpha(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$.

   (a) Mostre que α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta$.

   A aplicação α é um epimorfismo se:

   (i) α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\theta$, i.e., se, para qualquer símbolo de operação n-ário f, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

   $$\alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{A}/\theta}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n));$$

   (ii) α é sobrejetiva.

   As condições (i) e (ii) são simples de verificar. De facto,

   (i) Para qualquer símbolo de operação n-ário f, $n \in \mathbb{N}_0$, e para qualquer $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

   $$\begin{array}{rcl} \alpha(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) & = & [f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)]_\theta \\ & = & f^{\mathcal{A}/\theta}([a_1]_\theta, \ldots, [a_n]_\theta) \\ & = & f^{\mathcal{A}/\theta}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)). \end{array}$$

   (ii) A aplicação α é sobrejetiva, pois, para qualquer $[a]_\theta \in \mathcal{A}/\theta$, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = [a]_\theta$.

   (b) Mostre que $\ker \alpha = \theta$. Justifique que α é um monomorfismo se e só se $\theta = \triangle_A$.

   Tem-se

   $$\ker \alpha = \{(a, b) \mid \alpha(a) = \alpha(b)\}.$$

   Logo, para quaisquer $a, b \in A$,

   $$(a, b) \in \ker \alpha \Leftrightarrow \alpha(a) = \alpha(b) \Leftrightarrow [a]_\theta = [b]_\theta \Leftrightarrow (a, b) \in \theta.$$

   Portanto, $\ker \alpha = \theta$.

   Admitamos que α é um monomorfismo. Então α é um homomorfismo e é uma aplicação injetiva. Mostremos que $\theta = \triangle_A$. Uma vez que θ é uma relação de equivalência, a relação θ é reflexiva e, portanto, temos $\triangle_A \subseteq \theta$. Além disso, para quaisquer $a, b \in A$,

   $$\begin{array}{rcll} (a, b) \in \theta & \Rightarrow & (a, b) \in \ker \alpha & \\ & \Rightarrow & \alpha(a) = \alpha(b) & \\ & \Rightarrow & a = b & (\alpha \text{ é injetiva}) \\ & \Rightarrow & (a, b) \in \triangle_A. & \end{array}$$

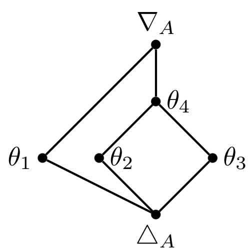
   Logo $\theta = \triangle_A$.

   Reciprocamente, admitamos que $\theta = \triangle_A$. Então, para quaisquer $a, b \in A$,

   $$\alpha(a) = \alpha(b) \Rightarrow (a, b) \in \ker \alpha \Rightarrow (a, b) \in \theta \Rightarrow (a, b) \in \triangle_A \Rightarrow a = b.$$

   Portanto α é injetiva. Uma vez que α é um homomorfismo e é injetiva, então α é um monomorfismo.

2. (a) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo digrama de Hasse



   e tal que $\theta_1 \circ \theta_4 = \theta_4 \circ \theta_1$.

i. Justifique que a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível e indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$.

Uma álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível se e só se $\triangle_A$ e ∇_A são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$.

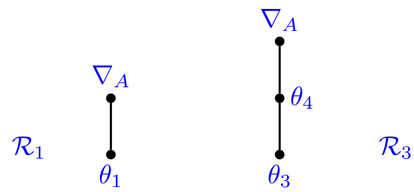
Uma congruência $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ diz-se uma congruência fator de $\mathcal{A}$ se existe $\theta' \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tal que $\theta \cap \theta' = \triangle_A$, $\theta \vee \theta' = \nabla_A$, $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$.

Do reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ conclui-se que $\theta_1 \cap \theta_4 = \theta_1 \wedge \theta_4 = \triangle_A$, $\theta_1 \vee \theta_4 = \nabla_A$. Além disso, sabe-se que $\theta_1 \circ \theta_4 = \theta_4 \circ \theta_1$. Logo θ_1 e θ_4 são congruências fator. Uma vez que $\theta_1, \theta_4 \notin \{\triangle_A, \nabla_A\}$, então $\triangle_A$ e ∇_A não são as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ e, portanto, $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível.

Uma vez que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator, temos $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$. As álgebras $\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}/\theta_4$ não são triviais, uma vez que $\mathcal{A}$ não é trivial (pois $\mathrm{Con}\mathcal{A} \neq \{\triangle_A\}$) e $\theta_1, \theta_1 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\nabla_A\}$.

ii. Diga, justificando, se os reticulados $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_1)$ e $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_3)$ são isomorfos.

Pelo Teorema da Correspondência sabe-se que $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_1) \cong [\theta_1, \nabla_A]$ e $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_3) \cong [\theta_3, \nabla_A]$. Os reticulados $\mathcal{R}_1 = [\theta_1, \nabla_A]$ e $\mathcal{R}_3 = [\theta_3, \nabla_A]$ podem ser representados, respetivamente, pelos diagramas de Hasse seguintes



Considerando que $\{\theta_1, \nabla_A\}$ e $\{\theta_3, \theta_4, \nabla_A\}$ são conjuntos finitos com um número distinto de elementos, não é possível definir uma aplicação bijetiva entre estes conjuntos. Logo não é possível definir um isomorfismo entre os reticulados $[\theta_1, \nabla_A]$ e $[\theta_3, \nabla_A]$. Portanto, os reticulados $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_1)$ e $\mathcal{C}on(\mathcal{A}/\theta_3)$ não são isomorfos.

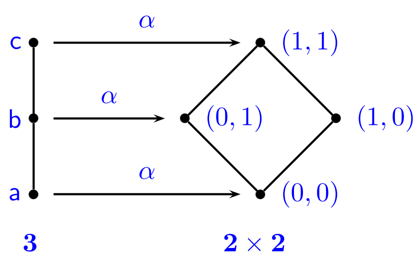
(b) Dê um exemplo de, ou justifique que não existe um exemplo de:

i. Uma álgebra subdiretamente irredutível que não seja diretamente indecomponível.

Toda a álgebra subdiretamente irredutível é diretamente indecomponível. Logo não existe qualquer álgebra nas condições indicadas.

ii. Uma álgebra diretamente indecomponível que não seja subdiretamente irredutível.

A cadeia com três elementos $\mathbf{3}$ é diretamente indeomponível, pois 3 é um número primo e toda a álgebra com um número primo de elementos é diretamente indcomponivel. Esta álgebra não é subdiretamente irredutível, pois o monomorfismo α de $\mathbf{3}$ em $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ definido da forma a seguir indicada



é um mergulho subdireto, pois a sua imagem é um produto subdireto de $(\mathcal{A}_i)_{i \in \{1,2\}}$, onde $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathbf{2}$, mas nem $p_1 \circ \alpha$ nem $p_2 \circ \alpha$ é um monomorfismo.

3. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que:

(a) HS é um operador de fecho.

Mostremos que HS é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$:

(1) $\mathbf{K}_1 \subseteq HS(\mathbf{K}_1)$;
(2) $(HS)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_1)$;
(3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HS(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_2)$.

As condições (1), (2) e (3) seguem facilmente das propriedades dos operadores H e S.

(1) Para qualquer operador $O \in \{S, H\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq S(\mathbf{K}_1)$ e $S(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq HS(\mathbf{K}_1)$.

(2) Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se

$$HSHS(\mathbf{K}_1) \overset{(i)}{\subseteq} HHSS(\mathbf{K}_1) \overset{(ii)}{=} HS(\mathbf{K}_1).$$

(i) $SH \leq HS$; (ii) $H^2 = H$; $S^2 = S$.

(3) Para qualquer operador $O \in \{S, H\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \quad &\Rightarrow \quad S(\mathbf{K}_1) \subseteq S(\mathbf{K}_2) \\ &\Rightarrow \quad HS(\mathbf{K}_1) \subseteq HS(\mathbf{K}_2). \end{aligned}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que HS é um operador de fecho.

(b) $HSH = HS$.

Pretendemos mostrar que $HSH = HS$, ou seja, pretendemos provar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $HSH(\mathbf{K}) = HS(\mathbf{K})$.

Ora, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, temos

$$HSH(\mathbf{K}) \overset{(i)}{\subseteq} HHS(\mathbf{K}) \overset{(ii)}{=} HS(\mathbf{K}).$$

(i) $SH \leq HS$; (ii) $H^2 = H$.
A inclusão contrária também é válida. De facto, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, tem-se $\mathbf{K} \subseteq H(\mathbf{K})$, donde resulta $S(\mathbf{K}) \subseteq SH(\mathbf{K})$ e, por conseguinte, $HS(\mathbf{K}) \subseteq HSH(\mathbf{K})$.
Logo $HS = HSH$.

4. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ as categorias definidas pelos diagramas seguintes

$$\mathbf{C} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "h"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \mathbf{D} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, "h'"] & Y \arrow[loop right, "\mathrm{id}_Y"] \end{tikzcd}$$

onde $h \neq id_A$ e $h = g \circ f$.

(a) Justifique que $g \circ f \circ g = g$ e $h \circ h = h$.

Uma vez que $f \in \hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, $g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ e $\mathbf{C}$ é uma categoria, tem-se $f \circ g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, B)$. Considerando que $g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, A)$, $f \circ g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, B)$ e $\mathbf{C}$ é uma categoria, segue que $g \circ f \circ g \in \hom_{\mathbf{C}}(B, A)$. Então, como g é o único $\mathbf{C}$-morfismo de B em A, concluímos $g \circ f \circ g = g$.

Atendendo a que $h = g \circ f$, $g \circ f \circ g = g$ e a operação $\circ$ é associativa, temos

$$h \circ h = (g \circ f) \circ (g \circ f) = (g \circ f \circ g) \circ f = g \circ f = h.$$

(b) Defina a categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ por meio de um diagrama.

A categoria $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge] (A,X) \arrow[loop left, "{(h,id_X)}"] \arrow[r, shift left, "{(id_A,h')}"] \arrow[r, shift right, "{(h,h')}"'] \arrow[d, shift left, "{(f,id_X)}"] \arrow[dr, "{(f,h')}"] & (A,Y) \arrow[loop right, "{(h,id_Y)}"] \arrow[d, shift left, "{(f,id_Y)}"] \\ (B,X) \arrow[u, shift left, "{(g,id_X)}"] \arrow[r, "{(id_B,h')}"] \arrow[ur, bend right=60, "{(g,h')}"'] & (B,Y) \arrow[u, shift left, "{(g,id_Y)}"] \end{tikzcd}$$

Além dos morfismos indicados no diagrama, são também morfismos de $\mathbf{C}$ os seguintes:

$$(id_A, id_X) : (A, X) \to (A, X), \qquad (id_A, id_Y) : (A, Y) \to (A, Y),$$
$$(id_B, id_X) : (B, X) \to (B, X), \qquad (id_B, id_Y) : (B, Y) \to (B, Y).$$

Cotações: $1.(2,5 + 2,5); 2.(2,5 + 1,75 + 1,25 + 1,25); 3.(2,5 + 2,0); 4.(1,75 + 2,0).$