Universidade do Minho
Departamento de Matemática

LCC | LMAT
25 de março de 2023

Álgebra Universal e Categorias

1º teste

duração: 1h30min

Nome:	**Número:**

Grupo I

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão.

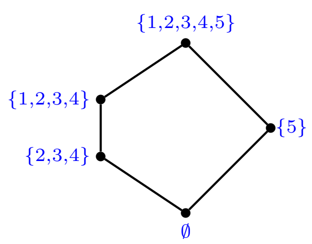
1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2, 1)$ onde $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$ e $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Indique, sem justificar, todos os subuniversos de $\mathcal{A}$. Represente o reticulado $(\mathrm{Sub}, \subseteq)$ por um diagrama de Hasse.

Resposta: Os subuniversos de $\mathcal{A}$ são: $\emptyset, \{5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}$. O reticulado dos subuniversos de $\mathcal{A}$ pode ser representado pelo diagrama seguinte



2. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$ e para quaisquer $X, Y \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X) \cup Sg^{\mathcal{A}}(Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X \cup Y)$.

Resposta: A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +^{\mathcal{N}})$ a álgebra de tipo (2), onde $+^{\mathcal{N}}$ representa a adição usual em $\mathbb{N}$, $X = \{2\}$ e $Y = \{3\}$. Então $Sg^{\mathcal{N}}(X) \cup Sg^{\mathcal{N}}(Y) \not\subseteq Sg^{\mathcal{N}}(X \cup Y)$, pois

$$\mathrm{Sg}^{\mathcal{N}}(X) \cup \mathrm{Sg}^{\mathcal{N}}(Y) = \{2n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{3n \,|\, n \in \mathbb{N}\},$$

$2 +^{\mathcal{N}} 3 = 5 \in \mathrm{Sg}^{\mathcal{N}}(X \cup Y)$ e $5 \notin \mathrm{Sg}^{\mathcal{N}}(X) \cup \mathrm{Sg}^{\mathcal{N}}(Y)$.

(b) Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$ e para quaisquer $X, Y \subseteq A$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(X \cap Y) \subsetneq Sg^{\mathcal{A}}(X) \cap Sg^{\mathcal{A}}(Y)$.

Resposta: A afirmação é verdadeira.

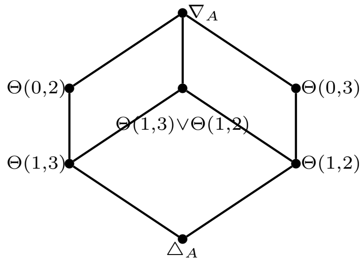
Tem-se $X \cap Y \subseteq X$ e $X \cap Y \subseteq Y$. Logo $Sg^{\mathcal{A}}(X \cap Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$ e $Sg^{\mathcal{A}}(X \cap Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y)$. Consequentemente, $Sg^{\mathcal{A}}(X \cap Y) \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(Y) \cap Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

3. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$, onde $A = \{0,1,2,3\}$, $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	2	1	2	1

x	0	1	2	3
$g^{\mathcal{A}}(x)$	1	3	3	1

e cujo reticulado de congruências pode ser representado pelo diagrama indicado ao lado.



(a) Sem apresentar os cálculos, indique $\Theta(2,3)$ e $\Theta(0,3)$. Diga, justificando, se $\Theta(2,3) \cup \Theta(0,3) = \Theta(2,3) \vee \Theta(0,3)$.

Resposta: Tem-se

- $\Theta(2,3) = \triangle_A \cup \{(2,3),(3,2),(2,1),(2,1),(1,3),(3,1)\}$;
- $\Theta(0,3) = \triangle_A \cup \{(0,3),(3,0),(1,2),(2,1)\}$.

A relação binária $\Theta(2,3)\cup\Theta(0,3)$ não é uma congruência em $\mathcal{A}$, pois não é uma relação de equivalência; mais especificamente, não é transitiva: $(0,3),(3,2) \in \Theta(2,3)\cup\Theta(0,3)$ e $(0,2) \notin \Theta(2,3)\cup\Theta(0,3)$.

(b) Indique a álgebra quociente $\mathcal{A}/\Theta(2,3)$.

Resposta: A álgebra $\mathcal{A}/\Theta(2,3)$ é a álgebra $(A/\Theta(2,3); f^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)}, g^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)})$ do tipo $(1,1)$, onde

$$A/\Theta(2,3) = \{[0]_{\Theta(2,3)}, [1]_{\Theta(2,3)}\},$$

pois $[1]_{\Theta(2,3)} = \{1,2,3\}$, $[0]_{\Theta(2,3)} = \{0\}$, e $f^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)}$ e $g^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)}$ são as operações definidas por

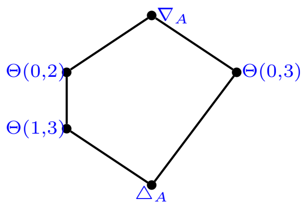
$$\begin{array}{rcl} f^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)} : A/\Theta(2,3) & \to & A/\Theta(2,3) \\ [0]_{\Theta(2,3)} & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(0)]_{\Theta(2,3)} = [2]_{\Theta(2,3)} = [1]_{\Theta(2,3)} \\ [1]_{\Theta(2,3)} & \mapsto & [f^{\mathcal{A}}(1)]_{\Theta(2,3)} = [1]_{\Theta(2,3)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g^{\mathcal{A}/\Theta(2,3)} : A/\Theta(2,3) & \to & A/\Theta(2,3) \\ [0]_{\Theta(2,3)} & \mapsto & [g^{\mathcal{A}}(0)]_{\Theta(2,3)} = [1]_{\Theta(2,3)} \\ [1]_{\Theta(2,3)} & \mapsto & [g^{\mathcal{A}}(3)]_{\Theta(2,3)} = [1]_{\Theta(2,3)}. \end{array}$$

4. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é congruente-distributiva.

Resposta: Uma álgebra $\mathcal{A}$ é conguente-distributiva se o seu reticulado de congruências é distributivo. Um reticulado é distributivo se e só se não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5 ou a M_3. Ora, o reticulado



é um sub-reticulado de $(\mathrm{Con}\mathcal{A}, \subseteq)$ e é isomorfo a N_5. Logo $(\mathrm{Con}\mathcal{A}, \subseteq)$ não é distributivo e, portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva.

Grupo II

Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.

1. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária. Mostre que se S_1 e S_2 são subniversos de $\mathcal{A}$, então $S_1 \cup S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária e S_1 e S_2 subniversos de $\mathcal{A}$. Uma vez que $\mathcal{A}$ é uma álgebra unária, todas as operações de $\mathcal{A}$ têm aridade 1. Como S_1 e S_2 são subuniversos de $\mathcal{A}$, tem-se $S_1, S_2 \subseteq A$ e S_1 e S_2 são fechados para todas as operações de $\mathcal{A}$. Nestas condições, o conjunto $S_1 \cup S_2$ também é um subuniverso de $\mathcal{A}$, pois $S_1 \cup S_2 \subseteq A$ e, para qualquer operação unária $f^{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}$ e para qualquer $x \in A$,

$$\begin{array}{rcl} x \in S_1 \cup S_2 & \Rightarrow & x \in S_1 \text{ ou } x \in S_2 \\ & \Rightarrow & f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \text{ ou } f^{\mathcal{A}}(x) \in S_2 \\ & \Rightarrow & f^{\mathcal{A}}(x) \in S_1 \cup S_2. \end{array}$$

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra unária, B um subuniverso de $\mathcal{A}$ e θ uma relação binária em A definida por

$$a\theta b \text{ se e só se } a = b \text{ ou } \{a, b\} \subseteq B.$$

Mostre que θ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

A relação θ é uma congruência em $\mathcal{A}$ se θ é uma relação de equivalência e satistaz a propriedade de substituição. Uma relação binária em A é uma relação de equivalência se é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. Mostremos que θ é uma relação nas condições indicadas.

(1) Para todo $x \in A$, tem-se $x = x$ e, portanto, $(x, x) \in \theta$. Logo θ é reflexiva.

(2) Para quaisquer $x, y \in A$,

$$(x, y) \in \theta \Rightarrow (x = y \text{ ou } \{x, y\} \subseteq B) \Rightarrow (y = x \text{ ou } \{y, x\} \subseteq B) \Rightarrow (y, x) \in \theta.$$

Logo θ é simétrica.

(3) Para quaisquer $x, y, z \in A$,

$$\begin{aligned} ((x, y) \in \theta \text{ e } (y, z) \in \theta) &\Rightarrow (x = y \text{ ou } \{x, y\} \subseteq B) \text{ e } (y = z \text{ ou } \{y, z\} \subseteq B) \\ &\Rightarrow ((x = y \text{ e } y = z) \text{ ou } (x = y \text{ e } \{y, z\} \subseteq B) \\ &\quad\ \text{ou } (\{x, y\} \subseteq B \text{ e } y = z) \text{ ou } (\{x, y\} \subseteq B \text{ e } \{y, z\} \subseteq B)) \\ &\Rightarrow ((x = z) \text{ ou } (\{x, z\} \subseteq B) \text{ ou } (\{x, z\} \subseteq B) \text{ ou } (\{x, z\} \subseteq B)) \\ &\Rightarrow (x, z) \in \theta. \end{aligned}$$

Portanto, θ é transitiva.

(4) Para qualquer operação $f^{\mathcal{A}}$ de A e para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{aligned} (x, y) \in \theta &\Rightarrow (x = y \text{ ou } \{x, y\} \subseteq B) \\ &\Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x) = f^{\mathcal{A}}(y) \text{ ou } \{f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)\} \subseteq B) \quad (f^{\mathcal{A}} \text{ é operação em } A \text{ e B é subuniverso de } \mathcal{A}) \\ &\Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \theta. \end{aligned}$$

Logo θ satisfaz a propriedade de substituição.

De (1), (2), (3) e (4) conclui-se que θ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

3. Justifique que, para qualquer álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$, se $|A| \leq 2$, então $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Dê exemplo de uma álgebra $\mathcal{A} = (A; F)$ tal que $|A| > 2$ e $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

Para qualquer álgebra $\mathcal{A}$, tem-se $\mathrm{Con}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Eq}(A)$. Se $|A| \leq 2$, tem-se $\mathrm{Eq}(A) \subseteq \{\triangle_A, \nabla_A\}$ e as relações $\triangle_A$ e ∇_A são congruências em $\mathcal{A}$. Logo $\mathrm{Eq}(A) \subseteq \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Portanto, $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Con}\mathcal{A}$.

Seja $\mathcal{A} = (\{1, 2, 3\}; 1^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (0), onde $1^{\mathcal{A}} = 1$. Neste caso tem-se $\mathrm{Eq}(A) = \mathrm{Con}\mathcal{A}$, pois, $\mathrm{Con}\mathcal{A} \subseteq \mathrm{Eq}(A)$ e, para todo $\theta \in \mathrm{Eq}(A)$, tem-se $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$, uma vez que toda a relação de equivalência θ satisfaz a propriedade de substituição (θ é reflexiva e, portanto, $(1^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}}) \in \theta$).

Cotações: Grupo I: $1.(2,0); 2.(1,5+1,5); 3.(2,25+2,0+1,5)$. Grupo II: $1.(3,0); 2.(3,5); 3.(2,75)$.