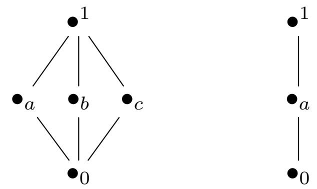
Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2020/2021
Exame de Álgebra Universal e Categorias
12 Junho 2021

Este teste é constituído por 4 questões. Justifique <u>sucintamente</u> todas as suas respostas. Responda aos Grupos I e II em folhas separadas. Duração: 2 h.

Grupo I

1. (14 valores) Sejam os conjuntos $M_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ e $B = \{0, 1, a\}$. Sejam os reticulados $\mathcal{M}_5 = (M_5; \wedge, \vee)$ e $\mathcal{B} = (B; \wedge', \vee')$, em que as operações de $\mathcal{M}_5$ e $\mathcal{B}$ são definidas pelos dois diagramas seguintes, respectivamente.



Seja $\alpha : M_5 \to B$ a aplicação tal que $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$ e $\alpha(x) = a$, para $x = a, b, c$.

(a) Seja $\theta = \Theta(b, c)$ em $\mathcal{M}_5$. Mostre que $(a, 1) \in \theta$.

(b) Sabendo que $Con(\mathcal{M}_5)$ é um reticulado com apenas 2 elementos:

i. Indique quais são essas congruências.

ii. Conclua que α não é um homomorfismo de $\mathcal{M}_5$ em $\mathcal{B}$.

iii. Conclua que $\mathcal{M}_5$ é uma álgebra directamente indecomponível.

(c) Indique uma subálgebra de $\mathcal{M}_5$ isomorfa a $\mathcal{B}$.

(d) Indique todos os subuniversos de $\mathcal{B}$.

(e) Seja $\theta = \Theta(0, a)$ em $\mathcal{B}$. Determine θ e descreva a álgebra $\mathcal{B}/\theta$.

Grupo II

2. (2 valores) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Mostre que $\Delta_{\mathcal{A}}$ é um producto subdirecto de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

3. (2 valores) Sejam $\mathcal{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte. Indique, caso existam:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "k"'] & & B \arrow[dl, "j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

(a) Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ que são monomorfismos.

(b) Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ que são invertíveis à esquerda.

4. (2 valores) Seja $f : A \to B$ um morfismo entre os conjuntos A e B na categoria Set. Mostre que: se f é epimorfismo então f é uma aplicação sobrejectiva.