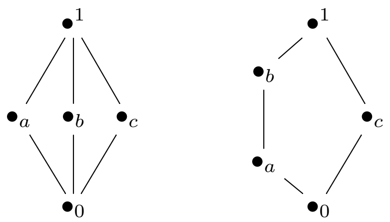
Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2020/2021
Teste de Álgebra Universal e Categorias - Versão A
27 Maio 2021

Este teste é constituído por 4 questões. Justifique <u>sucintamente</u> todas as suas respostas. Duração: 100 minutos.

---

1. (12 valores) Sejam os conjuntos $M_5 = N_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ e sejam os reticulados $\mathcal{M}_5 = (M_5; \wedge, \vee)$ e $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge', \vee')$, em que as operações de $\mathcal{M}_5$ e $\mathcal{N}_5$ são definidas a partir dos dois diagramas seguintes respectivamente.



   (a) Mostre que $Con(\mathcal{M}_5)$ é um reticulado com apenas 2 elementos. (Sugestão: Recorde a caracterização das congruências de reticulados em termos das propriedades das classes de equivalência e da propriedade do quadrilátero. Justifique a sua resposta de forma sucinta.)

   (b) Seja $\alpha : M_5 \to N_5$ a aplicação tal que $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$ e $\alpha(x) = c$, para $x = a, b, c$. Justifique com o facto expresso na alínea a) (e só assim) que α não é um homomorfismo de $\mathcal{M}_5$ em $\mathcal{N}_5$.

   (c) Justifique, usando o facto expresso na alinea a) (e só assim), que $\mathcal{M}_5$ é uma álgebra directamente indecomponível.

   (d) Justifique novamente que $\mathcal{M}_5$ é uma álgebra directamente indecomponível, usando um argumento de cardinalidade.

   (e) Seja θ a congruência $\Theta(a, b)$ de $\mathcal{N}_5$. Determine θ e descreva a álgebra $\mathcal{N}_5/\theta$.

2. (2 valores) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra. Mostre que $\Delta_{\mathcal{A}}$ é um produto subdirecto de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

3. (3 valores) Sejam $\mathcal{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte. Indique, caso existam:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "j"] & \\ A \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "k"'] & & C \end{tikzcd}$$

   (a) Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ que são monomorfismos.

   (b) Todos os morfismos de $\mathcal{C}$ que são invertíveis à esquerda.

4. (3 valores) Seja $f : A \to B$ um morfismo entre os conjuntos A e B na categoria Set. Mostre que f é epimorfismo sse f é uma aplicação sobrejectiva.