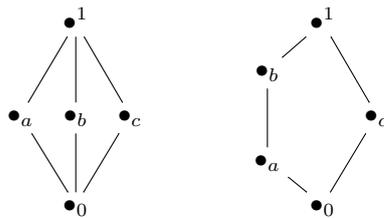


Lic. em Ciências da Computação e Lic. em Matemática 2020/2021
 Teste de Álgebra Universal e Categorias
 29 Abril 2021

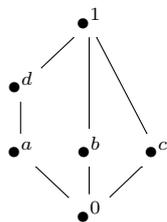
Este teste é constituído por 5 questões. Justifique sucintamente todas as suas respostas. Duração: 100 minutos.

1. (6 valores) Seja P o c.p.o. (\mathbb{N}, \leq) , onde \leq é a ordem usual nos números naturais.
 - (a) Mostre que P é um reticulado.
 - (b) O reticulado P é completo?
 - (c) Indique os elementos compactos do c.p.o. P .
2. (4 valores) Sejam os conjuntos $M_5 = N_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ e sejam os reticulados $\mathcal{M}_5 = (M_5, \leq)$ e $\mathcal{N}_5 = (N_5, \leq')$ dados respectivamente pelos dois diagramas seguintes.



- (a) Seja $\alpha : M_5 \rightarrow N_5$ dada por $\alpha(x) = x$. Esta aplicação α é um isomorfismo de reticulados?
- (b) Indique uma aplicação isótona $\alpha : N_5 \rightarrow M_5$.

3. (2 valores) Seja $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado tal que: para todo $a, b, c \in R$, se $a \wedge c = b \wedge c$ e $a \vee c = b \vee c$, então $a = b$. Mostre que \mathcal{R} é distributivo. (Sugestão: recorde a caracterização em termos de sub-reticulados isomorfos a \mathcal{M}_5 e \mathcal{N}_5 .)
4. (6 valores) Sejam $A = \{0, a, b, c, d, 1\}$ e $\mathcal{R} = (A; \wedge, \vee, 0, 1)$ o reticulado limitado dado pelo diagrama seguinte.



- (a) Mostre que o reticulado \mathcal{R} não é modular.
- (b) Determine $Sg^{\mathcal{R}}(\{a, b\})$.
- (c) Determine $\Theta(a, b)$.

5. (2 valores) Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e θ, ψ congruências em \mathcal{A} . Mostre que $\theta \cap \psi$ é uma congruência em \mathcal{A} .