Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (13 de junho de 2018) — duração: 2h30

1. (a) Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se S_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e S_2 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $S_1 \times S_2$ é um subuniverso da álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

   (b) Sejam $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}; f^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{0, 1\}; f^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo (1) tais que $f^{\mathcal{A}}$ e $f^{\mathcal{B}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a

x	0	1
$f^{\mathcal{B}}(x)$	1	0

   Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ e $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) \times Sg^{\mathcal{B}}(\{0\}) = Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c, 0)\})$.

2. Sejam $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; *^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}; *^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo (2), onde $*^{\mathcal{A}}$ representa a adição usual em $\mathbb{Z}$ e $*^{\mathcal{B}}$ é a operação definida por $x *^{\mathcal{B}} y = x + y - 5$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Seja $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $\alpha(x) = x + 5$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.

   (a) Mostre que α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

   (b) Justifique que o epimorfismo canónico $\pi_{\ker\alpha}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\ker\alpha$, definido por

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\ker\alpha} : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/\ker\alpha \\ x & \mapsto & [x]_{\ker\alpha} \end{array}$$

   é uma aplicação injetiva.

   (c) Conclua que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\ker\alpha$ e $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/\ker\alpha$.

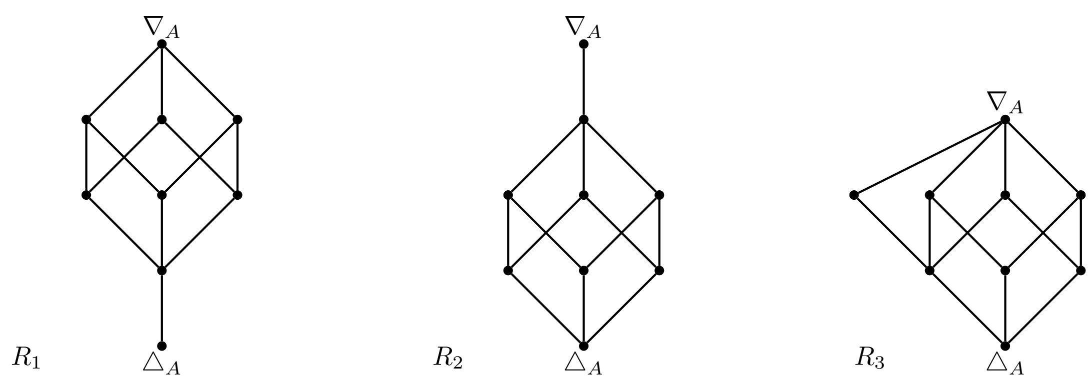
3. Seja $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1), onde $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $f^{\mathcal{A}} : \{0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ é a operação definida por

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	0	0	2	2

   Sejam $\theta_1 = \Theta(1, 3)$ e $\theta_2 = \Theta(0, 1) \vee \Theta(2, 3)$.

   (a) Considere a álgebra $\mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1; f^{\mathcal{A}/\theta_1})$. Para cada $[x]_{\theta_1} \in A/\theta_1$, determine $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([x]_{\theta_1})$.

   (b) Sabendo que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$ e que um dos seguintes diagramas de Hasse representa o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$, diga qual dos reticulados de congruências R_1, R_2 ou R_3 é o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$. Justifique.



4. Considere os operadores de classes de álgebras H, P e S. Mostre que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $HSP(\mathbf{K}) = HSPS(\mathbf{K})$. Conclua que $V(\mathbf{K}) = V(S(\mathbf{K}))$.

$(v.s.f.f.)$

5. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo f e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo g, se f e g são monomorfismos, então (f, g) é um monomorfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.

6. Sejam S e T objetos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se S e T são objetos terminais, então S e T são isomorfos.

7. Na categoria **Set**, considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} = \{(z, r) \mid z \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}\}$ e as funções p e q a seguir definidas

$$\begin{array}{ll} p : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, & p(z, r) = z + 2, \ \forall (z, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}, \\ q : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & q(z, r) = r + 3, \ \forall (z, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}. \end{array}$$

Mostre que o par $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, (p, q))$ é um produto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$.

8. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A, B, I objetos de $\mathbf{C}$ e $f, g : A \to B$ e $i : B \to I$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é uma soma amalgamada de (f, g), então (I, i) é um coigualizador de f e g.

9. Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso esquerdo de $F(g)$ se e só se f é um inverso esquerdo de g.

Cotação: 1.(1.5+1.5); 2.(1.5+1.25+0.75); 3.(1.5+0,75); 4.(1.25); 5.(2.0); 6.(2.0); 7.(2.0); 8.(2.0); 9.(2.0).