Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação
2017/2018

Álgebra Universal e Categorias

Exame de recurso (13 de junho de 2018) - Proposta de resolução — duração: 2h30

1. (a) **Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ e $\mathcal{B} = (B; G)$ álgebras do mesmo tipo. Mostre que se S_1 é um subuniverso de $\mathcal{A}$ e S_2 é um subuniverso de $\mathcal{B}$, então $S_1 \times S_2$ é um subuniverso da álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.**

Seja S_1 um subuniverso de $\mathcal{A}$. Então

(i) $S_1 \subseteq A$;

(ii) para qualquer símbolo de operação n-ário f, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $x_1, \dots x_n \in S_1$, $f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots x_n) \in S_1$.

Seja S_2 um subuniverso de $\mathcal{B}$. Então

(iii) $S_2 \subseteq B$;

(iv) para qualquer símbolo de operação n-ário f, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $y_1, \dots y_n \in S_2$, $f^{\mathcal{B}}(y_1, \dots y_n) \in S_2$.

Pretende-se mostrar que $S_1 \times S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. De facto:

(v) por (i) e (iii), tem-se $S_1 \times S_2 \subseteq A \times B$;

(vi) para qualquer símbolo de operação n-ário f, $n \in \mathbb{N}_0$, e para quaisquer $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in S_1 \times S_2$, $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in S_1 \times S_2$. Com efeito, como $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in S_1 \times S_2$, tem-se $x_1, \dots, x_n \in S_1$ e $y_1, \dots y_n \in S_2$. Logo, por (ii) e (iv), tem-se $f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) \in S_1$ e $f^{\mathcal{B}}(y_1, \dots, y_n) \in S_2$. Assim,

$$f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) = (f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n), f^{\mathcal{B}}(y_1, \dots, y_n)) \in S_1 \times S_2.$$

De (v) e (vi) conclui-se que $S_1 \times S_2$ é um subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

(b) **Sejam $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}; f^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{0, 1\}; f^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo (1) tais que $f^{\mathcal{A}}$ e $f^{\mathcal{B}}$ são as operações definidas por**

x	a	b	c
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a

x	0	1
$f^{\mathcal{B}}(x)$	1	0

.

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ e $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) \times Sg^{\mathcal{B}}(\{0\}) = Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c, 0)\})$.

Dada uma álgebra $\mathcal{C} = (C; F)$ e um conjunto $X \subseteq C$, representa-se por $Sg^{\mathcal{C}}(X)$ o menor subuniverso de $\mathcal{C}$ que contém X, isto é, $Sg^{\mathcal{C}}(X)$ é o menor subconjunto de C que contém X e é fechado para as operações de $\mathcal{C}$ (o que significa que, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $x_1, \dots, x_n \in Sg^{\mathcal{C}}(X)$, $f^{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) \in Sg^{\mathcal{C}}(X)$).

Assim, considerando a álgebra $\mathcal{A}$ e $X = \{c\}$, tem-se:

- $\{c\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$;
- $f^{\mathcal{A}}(c) = a \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$ (pois $c \in Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$);
- $f^{\mathcal{A}}(a) = a \in Sg^{\mathcal{A}}(X)$ (pois $a \in Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}}$).

Logo $\{a, c\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$.

A respeito de $\{a, c\}$ verifica-se que este conjunto contém $\{c\}$ e é um subuniverso de $\mathcal{A}$ (pois é fechado para as operações de $\mathcal{A}$). Então, como $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}$ que contém $\{c\}$, tem-se $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) \subseteq \{a, c\}$ e, portanto, $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) = \{a, c\}$.

De modo análogo determina-se $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$. Uma vez que $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{B}$ que contém $\{0\}$, tem-se:

- $\{0\} \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$;
- $f^{\mathcal{B}}(0) = 1 \in Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ (pois $0 \in Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ e $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{B}}$);
- $f^{\mathcal{B}}(1) = 0 \in Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ (pois $1 \in Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ e $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{B}}$).

Logo $\{0, 1\} \subseteq Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$.

O conjunto $\{0, 1\}$ contém $\{0\}$ e é um subuniverso de $\mathcal{B}$ (pois é fechado para as operações de $\mathcal{B}$). Então, como $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{B}$ que contém $\{0\}$, conclui-se que $Sg^{\mathcal{B}}(\{0\}) = \{0, 1\}$.

Logo $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) \times Sg^{\mathcal{B}}(\{0\}) = \{a, c\} \times \{0, 1\} = \{(a, 0), (c, 0), (a, 0), (a, 1)\}$.

Uma vez que $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c, 0)\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ que contém $\{(c, 0)\}$, tem-se:

- $\{(c,0)\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$;
- $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(c,0) = (f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{B}}(0)) = (a,1) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ (pois $(c,0) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ e $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$);
- $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(a,1) = (f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{B}}(1)) = (a,0) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ (pois $(a,1) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ e $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$);
- $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(a,0) = (f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{B}}(1)) = (a,1) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ (pois $(a,0) \in Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ e $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ é fechado para a operação $f^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}$).

Por conseguinte, $\{(c,0),(a,1),(a,0)\} \subseteq Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$. O conjunto $\{(c,0),(a,1),(a,0)\}$ contém $\{(c,0)\}$ e é fechado para as operações de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. Uma vez que $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$ é o menor subuniverso de $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ que contem $\{(c,0)\}$, vem que $Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\}) = \{(c,0),(a,1),(a,0)\}$.

Então $Sg^{\mathcal{A}}(\{c\}) \times Sg^{\mathcal{B}}(\{0\}) \neq Sg^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\{(c,0)\})$

2. **Sejam $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; *^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}; *^{\mathcal{B}})$ as álgebras de tipo (2), onde $*^{\mathcal{A}}$ representa a adição usual em $\mathbb{Z}$ e $*^{\mathcal{B}}$ é a operação definida por $x *^{\mathcal{B}} y = x + y - 5$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$. Seja $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a aplicação definida por $\alpha(x) = x + 5$, para todo $x \in \mathbb{Z}$.**

(a) **Mostre que α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.**

A aplicação α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$, uma vez que é compatível com o símbolo de operação $*$. De facto, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha(x *^{\mathcal{A}} y) = \alpha(x+y) = (x+y)+5 = (x+5)+(y+5)-5 = \alpha(x)+\alpha(y)-5 = \alpha(x) *^{\mathcal{B}} \alpha(y).$$

A aplicação α também é sobrejetiva, pois, para todo $y \in \mathbb{Z}$, existe $x = y-5 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha(x) = y$.
Uma vez que α é um homomorfismo sobrejetivo, então α é um epimorfismo.

(b) **Justifique que o epimorfismo canónico $\pi_{\ker\alpha}$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\ker\alpha$, definido por**

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\ker\alpha} : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/\ker\alpha \\ x & \mapsto & [x]_{\ker\alpha} \end{array}$$

é uma aplicação injetiva.

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rcl} \pi_{\ker\alpha}(x) = \pi_{\ker\alpha}(y) & \Rightarrow & [x]_{\ker\alpha} = [y]_{\ker\alpha} \\ & \Rightarrow & \alpha(x) = \alpha(y) \\ & \Rightarrow & x+5 = y+5 \\ & \Rightarrow & x = y. \end{array}$$

Logo α é injetiva.

(c) **Conclua que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\ker\alpha$ e $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/\ker\alpha$.**

Da alínea anterior segue que $\pi_{\ker\alpha}$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}/\ker_{\alpha}$. Logo $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\ker\alpha$. Da alínea (a) e pelo Teorema do Homomorfismo, conclui-se que $\mathcal{A}/\ker\alpha \cong \mathcal{B}$.

3. **Seja $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1), onde $A = \{0,1,2,3\}$ e $f^{\mathcal{A}} : \{0,1,2,3\} \to \{0,1,2,3\}$ é a operação definida por**

x	0	1	2	3
$f^{\mathcal{A}}(x)$	0	0	2	2

Sejam $\theta_1 = \Theta(1,3)$ e $\theta_2 = \Theta(0,1) \vee \Theta(2,3)$.

(a) **Considere a álgebra $\mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1; f^{\mathcal{A}/\theta_1})$. Para cada $[x]_{\theta_1} \in A/\theta_1$, determine $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([x]_{\theta_1})$.**

Por definição, $\Theta(1,3)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,3)\}$. Então, como $(1,3) \in \Theta(1,3)$, $\Theta(1,3)$ é uma relação de equivalência e $\Theta(1,3)$ satisfaz a propriedade de substituição, tem-se

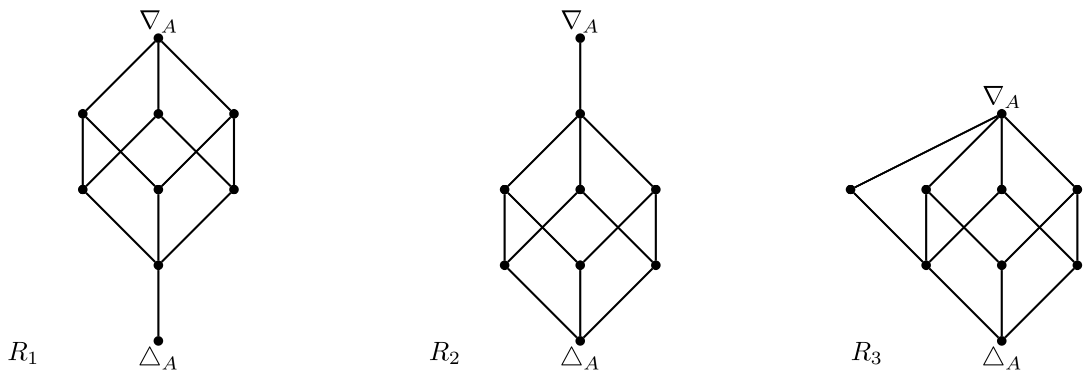
(i) $\triangle_A \subseteq \Theta(1,3)$ (pois $\Theta(1,3)$ é reflexiva);
(ii) $(1,3) \in \Theta(1,3)$ (por definição de $\Theta(1,3)$);
(iii) $(3,1) \in \Theta(1,3)$ (por (ii) e porque $\Theta(1,3)$ é simétrica);
(iv) $(f^{\mathcal{A}}(1), f^{\mathcal{A}}(3)) = (0,2) \in \Theta(1,3)$ (por (ii) e porque $\Theta(1,3)$ satisfaz a propriedade de substituição);
(v) $(2,0) \in \Theta(1,3)$ (por (iv) e porque $\Theta(1,3)$ é simétrica);
(vi) $(f^{\mathcal{A}}(0), f^{\mathcal{A}}(2)) = (0,2) \in \Theta(1,3)$ (por (iv) e porque $\Theta(1,3)$ satisfaz a propriedade de substituição);

(vii) $(f^{\mathcal{A}}(2), f^{\mathcal{A}}(0)) = (2,0) \in \Theta(1,3)$ (por (v) e porque $\Theta(1,3)$ satisfaz a propriedade de substituição).

Assim, $\triangle_A \cup \{(1,3),(3,1),(0,2),(2,0)\} \subseteq \Theta(1,3)$. Uma vez que $\triangle_A \cup \{(1,3),(3,1),(0,2),(2,0)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,3)\}$ e $\Theta(1,3)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,3)\}$, então $\Theta(1,3) = \triangle_A \cup \{(1,3),(3,1),(0,2),(2,0)\}$.

Como $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(1,3),(3,1),(0,2),(2,0)\}$, tem-se $A/\theta_1 = \{[1]_{\theta_1}, [0]_{\theta_1}\}$ e, por definição de $f^{\mathcal{A}/\theta_1}$, $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([1]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(1)]_{\theta_1} = [0]_{\theta_1}$ e $f^{\mathcal{A}/\theta_1}([0]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(0)]_{\theta_1} = [0]_{\theta_1}$.

(b) **Sabendo que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$ e que um dos seguintes diagramas de Hasse representa o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$, diga qual dos reticulados de congruências R_1, R_2 ou R_3 é o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$. Justifique.**



Atendendo a que $|A| = 4$, $|A/\theta_1| = 2$ e $A \cong A/\theta_1 \times A/\theta_2$, tem-se $|A/\theta_2| = 2$. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ é um produto de álgebras não triviais e, portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível. Uma álgebra é diretamente indecomponível se e só as suas únicas congruências fator são a congruência trivial e a congruência universal. Então, como $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponível, a álgebra $\mathcal{A}$ tem congruências fator para além das congruências $\triangle_A$ e ∇_A. Uma congruência $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ diz-se uma congruência fator se existe $\theta' \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tal que: $\theta \cap \theta' = \triangle_A$, $\theta \vee \theta' = \nabla_A$ e $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta$. Uma vez que nos reticulados R_1 e R_2 as únicas congruências fator são a congruência trivial e a congruência universal, conclui-se que o reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ é representado pelo diagrama R_3.

4. **Considere os operadores de classes de álgebras H, P e S. Mostre que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $HSP(\mathbf{K}) = HSPS(\mathbf{K})$. Conclua que $V(\mathbf{K}) = V(S(\mathbf{K}))$.**

Para qualquer operador $O \in \{H, P, S\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$, verifica-se que:

- $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$.
- $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}')$.

Assim, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, tem-se $\mathbf{K} \subseteq S(\mathbf{K})$, donde $P(\mathbf{K}) \subseteq PS(\mathbf{K})$, $SP(\mathbf{K}) \subseteq SPS(\mathbf{K})$, $HSP(\mathbf{K}) \subseteq HSPS(\mathbf{K})$. Para qualquer classe $\mathbf{K}$ de álgebras, também se tem

$$\begin{array}{rcll} HSPS(\mathbf{K}) & \subseteq & HSSP(\mathbf{K}) & (\text{pois } PS \leq SP) \\ & = & HSP(\mathbf{K}) & (\text{pois } S^2 = S). \end{array}$$

Logo $HSP(\mathbf{K}) = HSPS(\mathbf{K})$.

Pelo Teorema de Tarski tem-se $HSP(\mathbf{K}) = V(\mathbf{K})$, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$. Logo $V(\mathbf{K}) = HSP(\mathbf{K}) = HSPS(\mathbf{K}) = V(S(\mathbf{K}))$.

5. **Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: Para quaisquer categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo f e para qualquer $\mathbf{D}$-morfismo g, se f e g são monomorfismos, então (f, g) é um monomorfismo de $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$.**

A afirmação é verdadeira.

Se $f : A \to B$ um é monomorfismo de $\mathbf{C}$, então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $i, j : C \to A$,

$$f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j.$$

Se $g : D \to E$ é um monomorfismo de $\mathbf{D}$, então, para quaisquer $\mathbf{D}$-morfismos $p, q : F \to D$,

$$g \circ p = g \circ q \Rightarrow p = q.$$

.

Sendo f um morfismo de $\mathbf{C}$ e g um morfismo de $\mathbf{D}$, então $(f,g):(A,D)\to(B,E)$ é um morfismo de $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$. Além disso, para quaisquer morfismos $(i,p):(C,F)\to(A,D)$ e $(j,q):(C,F)\to(A,D)$ da categoria $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$, tem-se

$$\begin{array}{rll}(f,g)\circ(i,p)=(f,g)\circ(j,q) & \Rightarrow & (f\circ i, g\circ p)=(f\circ j, g\circ q)\\ & \Rightarrow & f\circ i=f\circ j \text{ e } g\circ p=g\circ q\\ & \Rightarrow & i=j \text{ e } p=q \qquad\qquad \text{(pois } f \text{ e } g \text{ são monomorfismos)}\\ & \Rightarrow & (i,p)=(j,q).\end{array}$$

Logo (f,g) é um monomorfismo de $\mathbf{C}\times\mathbf{D}$.

6. **Sejam S e T objetos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se S e T são objetos terminais, então S e T são isomorfos.**

Sejam S e T objetos terminais de $\mathbf{C}$. Uma vez que T é um objeto terminal, então existe um, e um só, morfismo $f:S\to T$. Como S é um objeto terminal, existe um, e um só, morfismo $g:T\to S$. Logo $g\circ f:S\to S$ e $f\circ g:T\to T$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Atendendo a que $id_S:S\to S$ é um morfismo de $\mathbf{C}$, os morfismos id_S e $g\circ f$ são elementos de $\hom(S,S)$ e $|\hom(S,S)|=1$, conclui-se que $g\circ f=id_S$. De modo análogo, conclui-se que $f\circ g=id_T$. Logo f é invertível à direita e à esquerda e, portanto, f é um isomorfismo. Por conseguinte, S e T são objetos isomorfos.

7. **Na categoria Set, considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o produto cartesiano $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}=\{(z,r)\,|\,z\in\mathbb{Z}, r\in\mathbb{R}\}$ e as funções p e q a seguir definidas**

$$\begin{array}{ll}p:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{Z}, & p(z,r)=z+2,\ \forall(z,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R},\\ q:\mathbb{Z}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, & q(z,r)=r+3,\ \forall(z,r)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R}.\end{array}$$

Mostre que o par $(\mathbb{Z}\times\mathbb{R},(p,q))$ é um produto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$.

O par $(\mathbb{Z}\times\mathbb{R},(p,q))$ é um produto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$ se:

(i) p é uma função de $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ em $\mathbb{Z}$;

(ii) q é uma função de $\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$;

(iii) para qualquer conjunto X e para quaisquer funções $f:X\to\mathbb{Z}$ e $g:X\to\mathbb{R}$, existe uma, e uma só, função $u:X\to\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ tal que $p\circ u=f$ e $q\circ u=q$.

Atendendo a que as condições (i) e (ii) são satisfeitas, resta provar (iii).

Se X é um conjunto e $f:X\to\mathbb{Z}$ e $g:X\to\mathbb{R}$ são funções, então a correspondência a seguir definida

$$\begin{array}{rcl}u:X & \to & \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\\ x & \mapsto & (f(x)-2, g(x)-3)\end{array}$$

é uma função. Facilmente, verifica-se que $p\circ u=f$ e $q\circ u=q$. De facto, as funções $p\circ u$ e f têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x\in\mathbb{Z}$,

$$p\circ u(x)=p((f(x)-2,g(x)-3))=(f(x)-2)+2=f(x).$$

Logo $p\circ u=f$. De modo semelhante prova-se que $q\circ u=g$. A função u é a única função que satisfaz as igualdades indicadas em (iii). Com efeito, se

$$\begin{array}{rcl}v:X & \to & \mathbb{Z}\times\mathbb{R}\\ x & \mapsto & (v_1(x),v_2(x))\end{array}$$

é uma função tal que $p\circ v=f$ e $q\circ v=q$, então, para qualquer $x\in X$, $v_1(x)+2=f(x)$ e $v_2(x)+3=g(x)$, donde segue que $v_1(x)=f(x)-2$ e $v_2(x)=g(x)-3$ e, portanto, $u(x)=(f(x)-2,g(x)-3)=(v_1(x),v_2(x))=v(x)$; logo $u=v$.

Desta forma, fica provado que o par $(\mathbb{Z}\times\mathbb{R},(p,q))$ é um produto de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}$.

8. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A, B, I objetos de $\mathbf{C}$ e $f,g:A\to B$ e $i:B\to I$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(I,(i,i))$ é uma soma amalgamada de (f,g), então (I,i) é um coigualizador de f e g.**

Admitamos que $(I,(i,i))$ é uma soma amalgamada de (f,g). Então

(i) $i\circ f=i\circ g$;

(ii) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f', g' : B \to X$ tais que $f' \circ f = g' \circ g$, existe um, e um só, morfismo $u : I \to X$ tal que $u \circ i = f'$ e $u \circ i = g'$.

Pretendemos mostrar que (I, i) é um coigualizador de f e g, ou seja, que:

(iii) $i \circ f = i \circ g$;

(iv) para qualquer objeto Y de $\mathbf{C}$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $h' : B \to Y$ tal que $h' \circ f = h' \circ g$, existe um, e um só, morfismo $v : I \to Y$ tal que $v \circ i = f'$.

Ora, a partir de (i) é imediato (iii). Além disso, se Y é um objeto de $\mathbf{C}$ e $h' : B \to Y$ é um $\mathbf{C}$-morfismo tal que $h' \circ f = h' \circ g$, então existem $X = Y$ e $f' = h'$ e $g' = h'$ tais que $f' \circ f = g' \circ g$. Logo, por (ii), existe $v : I \to Y$ tal que $v \circ i = f' = h'$ (e $v \circ i = g' = h'$).

Desta forma, fica provado que (I, i) é um coigualizador de f e g.

9. **Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorias, $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ um funtor e $f : A \to B$ e $g : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se F é fiel, então $F(f)$ é um inverso esquerdo de $F(g)$ se e só se f é um inverso esquerdo de g.**

   Admitamos que F é um funtor fiel. Então, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $p, q : X \to Y$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

   Suponhamos que $F(f) : F(A) \to F(B)$ é um inverso esquerdo de $F(g) : F(B) \to F(A)$. Então $F(f) \circ F(g) = id_{F(A)}$, donde segue que $F(f \circ g) = F(id_A)$, pois F é um funtor, e, por conseguinte, $f \circ g = id_A$, uma vez que F é fiel. Logo f é um inverso esquerdo de g.

   Reciprocamente, admitamos que f é um inverso esquerdo de g; então $f \circ g = id_A$. Logo $F(f \circ g) = F(id_A)$, donde $F(f) \circ F(g) = id_{F(A)}$, pois F é funtor. Assim, $F(f)$ é um inverso esquerdo de $F(g)$.

Cotação: 1.(1.5+1.5); 2.(1.5+1.25+0.75); 3.(1.5+0,75); 4.(1.25); 5.(2.0); 6.(2.0); 7.(2.0); 8.(2.0); 9.(2.0).