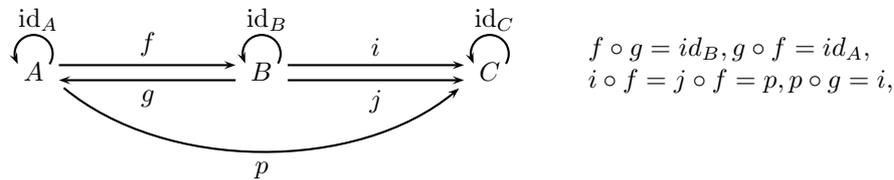


## Álgebra Universal e Categorias

\_\_\_\_\_ 2º teste (30 de maio de 2018) \_\_\_\_\_ duração: 2 horas \_\_\_\_\_

1. (a) Seja  $\mathbf{C}$  a categoria definida pelo diagrama seguinte



- Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria  $\mathbf{C}/\mathbf{C}$  tem dois objetos iniciais.
- (b) Seja  $\mathbf{C}$  a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria  $\mathbf{D}$  de  $\mathbf{C}$  tal que  $\mathbf{D}$  seja uma subcategoria plena de  $\mathbf{C}$ ,  $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$  e  $A$  e  $B$  não sejam isomorfos em  $\mathbf{D}$ .
- (c) Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria **Set**, todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.
2. Seja  $\mathbf{C}$  uma categoria,  $A, B, C$  objetos de  $\mathbf{C}$  e  $f : A \rightarrow C$  e  $g : B \rightarrow C$  monomorfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $i : A \rightarrow B$  e  $j : B \rightarrow A$  são morfismos de  $\mathbf{C}$  tais que  $f \circ j = g$  e  $g \circ i = f$ , então  $i$  e  $j$  são invertíveis e  $i^{-1} = j$ .
3. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria e  $A, B$  e  $C$  objetos de  $\mathbf{C}$  tais que, para qualquer objeto  $X$  de  $\mathbf{C}$ ,  $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$  e  $i_A : A \rightarrow C$  e  $i_B : B \rightarrow C$  são morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ , então  $i_A$  é invertível à esquerda.
4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos  $\{0\}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$  e as funções  $i, f$  e  $g$  definidas por

$$\begin{array}{lcl}
 i : \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0 & f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} & g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \\
 0 \mapsto 0 & x \mapsto 0 & x \mapsto 3x
 \end{array}$$

Mostre que  $(\{0\}, i)$  é um igualizador de  $f$  e  $g$ .

5. Sejam  $\mathbf{C}$  uma categoria com objeto inicial  $I$  e  $f_A : I \rightarrow A$  e  $f_B : I \rightarrow B$  morfismos de  $\mathbf{C}$ . Mostre que se  $(C, (i_A, i_B))$  é um coproduto de  $A$  e  $B$ , então  $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$  é uma soma amalgamada de  $(f_A, f_B)$ .
6. Seja  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$  o funtor que a cada conjunto  $A$  associa o produto cartesiano  $A \times A$  e que a cada função  $f : A \rightarrow B$  associa a função

$$\begin{array}{lcl}
 F(f) : F(A) \rightarrow F(B) \\
 (x, y) \mapsto (f(x), f(y))
 \end{array}$$

Diga, justificando, se:

- (a) O funtor  $F$  é fiel.  
 (b) O funtor  $F$  preserva e reflete monomorfismos.