Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 2017/2018

# Álgebra Universal e Categorias

2º teste (30 de maio de 2018) — duração: 2 horas

1. (a) Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend right=40, "p"'] & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l}
f \circ g = id_B, g \circ f = id_A, \\
i \circ f = j \circ f = p, p \circ g = i,
\end{array}
$$

Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria $\mathbf{C}/C$ tem dois objetos iniciais.

(b) Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{D}$ seja uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ e $A$ e $B$ não sejam isomorfos em $\mathbf{D}$.

(c) Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria **Set**, todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.

2. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, $A$, $B$, $C$ objetos de $\mathbf{C}$ e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ monomorfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $i : A \to B$ e $j : B \to A$ são morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, então $i$ e $j$ são invertíveis e $i^{-1} = j$.

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $A$, $B$ e $C$ objetos de $\mathbf{C}$ tais que, para qualquer objeto $X$ de $\mathbf{C}$, $\hom(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \to C$ e $i_B : B \to C$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de $A$ e $B$, então $i_A$ é invertível à esquerda.

4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{0\}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ e as funções $i$, $f$ e $g$ definidas por

$$
\begin{array}{rcl} i : \{0\} & \to & \mathbb{N}_0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}, \qquad
\begin{array}{rcl} g : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}.
$$

Mostre que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de $f$ e $g$.

5. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial $I$ e $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de $A$ e $B$, então $(C, (i_A : A \to C, i_B : B \to C))$ é uma soma amalgamada de $(f_A, f_B)$.

6. Seja $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ o funtor que a cada conjunto $A$ associa o produto cartesiano $A \times A$ e que a cada função $f : A \to B$ associa a função

$$
\begin{array}{rrcl} F(f) : & F(A) & \to & F(B) \\ & (x, y) & \mapsto & (f(x), f(y)) \end{array}
$$

Diga, justificando, se:

(a) O funtor $F$ é fiel.

(b) O funtor $F$ preserva e reflete monomorfismos.

Cotação: 1.(2.0+2.0+2.0); 2.(2.25); 3.(2.25); 4.(2.75); 5.(2.75); 6.(2.0+2.0).