Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações | 2017/2018

Álgebra Universal e Categorias

2º teste (30 de maio de 2018) — duração: 2 horas

1. (a) **Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida pelo diagrama seguinte**

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[rr, bend right=40, "p"'] & B \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{l} f \circ g = id_B, g \circ f = id_A, \\ i \circ f = j \circ f = p, p \circ g = i, \end{array}$$

Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria $\mathbf{C}/C$ tem dois objetos iniciais.

Os objetos da categoria $\mathbf{C}/C$ são todos os pares (X, h), onde $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $h \in \hom(X, C)$. Assim, os objetos de $\mathbf{C}/C$ são (A, p), (B, i), (B, j), (C, id_C). Dados (X, h), (Y, k) objetos de $\mathbf{C}/C$, um morfismo de (X, h) em (Y, k) é um $\mathbf{C}$-morfismo $u : X \to Y$ tal que $k \circ u = h$. Então:

- $\hom((C, id_C), (A, p)) = \emptyset$;
- $\hom((B, i), (B, j)) = \emptyset$;
- $\hom((B, j), (B, i)) = \emptyset$;
- $\hom((A, p), (B, i)) = \{f : (A, p) \to (B, i)\}, \hom((A, p), (B, j)) = \{f : (A, p) \to (B, j)\}$, $\hom((A, p), (C, id_C)) = \{p : (A, p) \to (C, id_C)\}, \hom((A, p), (A, p)) = \{id_{(A,p)}\}$.

Logo a categoria $\mathbf{C}/C$ tem um único objeto inicial, que é o objeto (A, p).

Assim, a afirmação é falsa.

(b) **Seja $\mathbf{C}$ a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{D}$ seja uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$, $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$ e A e B não sejam isomorfos em $\mathbf{D}$.**

Uma categoria $\mathbf{D} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{D}), \hom_{\mathbf{D}}, id^{\mathbf{D}}, \circ^{\mathbf{D}})$ diz-se uma subcategoria da categoria $\mathbf{C} = (\mathrm{Obj}(\mathbf{C}), \hom_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ se:

- $\mathrm{Obj}(\mathbf{D}) \subseteq \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$;
- todo o morfismo de $\mathbf{D}$ é um morfismo de $\mathbf{C}$;
- para qualquer $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, o morfismo $id_X^{\mathbf{D}}$ de $\mathbf{D}$ é o mesmo que o morfismo $id_X^{\mathbf{C}}$ de $\mathbf{C}$;
- para quaisquer $\mathbf{D}$-morfismos $f : A \to B$ e $g : B \to D$, o morfismo $g \circ^{\mathbf{D}} f$ de $\mathbf{D}$ é mesmo que o morfismo $g \circ^{\mathbf{C}} f$ de $\mathbf{C}$.

Uma subcategoria $\mathbf{D}$ de $\mathbf{C}$ diz-se uma subcategoria plena se, para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, $\hom_{\mathbf{D}}(X, Y) = \hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Assim, se $\mathbf{D}$ é uma subcategoria plena de $\mathbf{C}$ tal que $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbf{D})$, segue que f, g, id_A, id_B são morfismos de $\mathbf{D}$. Então, como $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$, conclui-se que f é um isomorfismo de $\mathbf{D}$ e, portanto, A e B são isomorfos em $\mathbf{D}$.

Logo a afirmação é falsa.

(c) **Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria Set, todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.**

Na categoria **Set**, os objetos terminais são os conjuntos singulares e os monomorfismos são as funções injetivas. Claramente, toda a função que tem por domínio um conjunto singular é uma função injetiva.

Assim, a afirmação é verdadeira.

2. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria, A, B, C objetos de $\mathbf{C}$ e $f : A \to C$ e $g : B \to C$ monomorfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $i : A \to B$ e $j : B \to A$ são morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, então i e j são invertíveis e $i^{-1} = j$.**

   Sejam $f : A \to C$ e $g : B \to C$ monomorfismos de $\mathbf{C}$ e $i : A \to B$ e $j : B \to A$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$.

   Pretende-se mostrar que $i^{-1} = j$, ou seja, que $i \circ j = id_B$ e $j \circ i = id_A$.

   Ora, de $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, segue que $(g \circ i) \circ j = g$, pelo que $g \circ (i \circ j) = g \circ id_B$ e, uma vez que g é monomorfismo, tem-se $i \circ j = id_B$.

   De forma análoga, prova-se que $j \circ i = id_A$. De facto, de $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$ também se tem $f \circ (j \circ i) = f$, donde $f \circ (j \circ i) = f \circ id_A$ e, como f é monomorfismo, vem que $j \circ i = id_A$.

3. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B e C objetos de $\mathbf{C}$ tais que, para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, $\hom(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \to C$ e $i_B : B \to C$ são morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então i_A é invertível à esquerda.**

   Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e A, B e C objetos de $\mathbf{C}$ tais que, para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$, $\hom(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \to C$ e $i_B : B \to C$ são morfismos de $\mathbf{C}$.

   Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B. Então, para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $f' : A \to X$ e $g' : B \to X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ i_A = f'$ e $u \circ i_B = g'$.

   Queremos mostrar que existe $i' : C \to A$ tal que $i' \circ i_A = id_A$.

   Uma vez que, para todo $X \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, $\hom(B, X) \neq \emptyset$ e $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, existe $g' \in \hom(B, A)$. Como $A \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$, então, por definição de categoria, $id_A : A \to A$ é um morfismo de $\mathbf{C}$. Logo, atendendo a que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, existe um, e um só, morfismo $u : C \to A$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[r, "i_A"'] & C \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "g'"'] \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

   i.e., tal que $u \circ i_A = id_A$ e $u \circ i_B = g'$. Como $u \circ i_A = id_A$, então i_A é invertível à esquerda.

4. **Na categoria Set, considere os conjuntos $\{0\}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$ e as funções i, f e g definidas por**

$$\begin{array}{rcl} i : \{0\} & \to & \mathbb{N}_0 \\ 0 & \mapsto & 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{N}_0 & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 3x \end{array}.$$

   Mostre que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de f e g.

   Pretende-se mostrar que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de f e g, isto é, que:

   (i) $f \circ i = g \circ i$;

   (ii) para qualquer $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer $\mathbf{C}$-morfismo $k : K \to A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um, e um só, morfismo $u : K \to \{0\}$ tal que $i \circ u = k$.

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ k \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

   (i) A prova desta condição é imediata, pois as funções $f \circ i$ e $g \circ i$ têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in A$,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(0) = 0 = 3 \times 0 = 3 \times i(x) = g(i(x)).$$

(ii) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $k : K \to A$ um $\mathbf{C}$-morfismo tais que $f \circ k = g \circ k$. Então, para qualquer $x \in K$,

$$(f \circ k)(x) = (g \circ k)(x),$$

donde resulta

$$0 = 3k(x)$$

e, portanto, $k(x) = 0$, para todo $x \in K$. Assim, k é a função definida por

$$\begin{array}{rcl} k : K & \to & A \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Pretende-se mostrar que existe uma, e uma só, função $u : K \to \{0\}$ tal que $i \circ u = k$. Claramente, existe uma única função de K em $\{0\}$ - a função definida por

$$\begin{array}{rcl} k : K & \to & \{0\} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

As funções $i \circ u$ e k têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in K$, $(i \circ u)(x) = 0 = k(x)$. Logo $i \circ u = k$.

5. **Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então $(C, (i_A : A \to C, i_B : B \to C))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).**

Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e morfismos $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$.

Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B. Então,

(1) $i_A \in \hom(A, C)$ e $i_B \in \hom(B, C)$,

(2) para qualquer objeto X de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $g_A : A \to X$ e $g_B : B \to X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \to X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A \arrow[ur, "g_A"] \arrow[r, "i_A"'] & C \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "g_B"'] \arrow[l, "i_B"] \end{tikzcd}$$

Pretende-se mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B), ou seja, que

(3) $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

(4) para para qualquer objeto K de $\mathbf{C}$ e para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $h_A : A \to K$ e $h_B : B \to K$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$, existe um, e um só, morfismo $v : C \to K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "f_A"'] & B \arrow[d, "i_B"] \arrow[ddr, "h_B"] & \\ A \arrow[r, "i_A"] \arrow[drr, "h_A"'] & C \arrow[dr, "v"] & \\ & & K \end{tikzcd}$$

(3) Uma vez que $i_A \circ f_A, i_B \circ f_B \in \hom(I, C)$ e $|\hom(I, C)| = 1$, pois I é um objeto inicial, então $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$.

(4) Sejam $K \in \mathrm{Obj}(\mathbf{C})$ e $h_A : A \to K$ e $h_B : B \to K$ morfismos de $\mathbf{C}$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$. Como $h_A \in \hom(A, K)$ e $h_B \in \hom(B, K)$, então, por (2), existe um, e um só, morfismo, $v : C \to K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$

Logo $(C, (i_A : A \to C, i_B : B \to C))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

6. **Seja $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ o funtor que a cada conjunto A associa o produto cartesiano $A \times A$ e que a cada função $f : A \to B$ associa a função**

$$\begin{array}{rccc} F(f): & F(A) & \to & F(B) \\ & (x,y) & \mapsto & (f(x), f(y)) \end{array}$$

Diga, justificando, se:

(a) **O funtor F é fiel.**

O funtor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \to B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Uma vez que, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \to B$,

$$\begin{array}{rcl} F(f) = F(g) & \Rightarrow & \forall x, y \in A, F(f)(x,y) = F(f)(x,y) \\ & \Rightarrow & \forall x, y \in A, (f(x), f(y)) = (g(x), g(y)) \\ & \Rightarrow & \forall x, y \in A, f(x) = g(x) \text{ e } f(y) = g(y) \\ & \Rightarrow & \forall x \in A, f(x) = g(x) \\ & \Rightarrow & f = g \quad (\text{ as funções f e g têm o mesmo domínio e codomínio}), \end{array}$$

então o funtor F é fiel.

(b) **O funtor F preserva e reflete monomorfismos.**

Todo o funtor fiel reflete monomorfismos. Uma vez que F é fiel, então F reflete monomorfismos.

Na categoria **Set** os monomofismos são as funções injetivas. Se $f : A \to B$ é um **Set**-monomorfismo, então f é uma função injetiva. Se f é uma função injetiva, então $F(f)$ também é uma função injetiva; de facto, para quaisquer $(x,y), (x',y') \in A \times A$,

$$\begin{array}{rcl} F(f)(x,y) = F(f)(x',y') & \Rightarrow & (f(x), f(y)) = (f(x'), f(y')) \\ & \Rightarrow & f(x) = f(x') \text{ e } f(y) = f(y') \\ & \Rightarrow & x = x' \text{ e } y = y' \\ & \Rightarrow & (x,y) = (x',y'). \end{array}$$

Uma vez que $F(f)$ é injetiva, então $F(f)$ é um monomorfismo. Logo o funtor F preserva monomorfismos.

Cotação: 1.(2.0+2.0+2.0); 2.(2.25); 3.(2.25); 4.(2.75); 5.(2.75); 6.(2.0+2.0).