Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações — 2017/2018

Álgebra Universal e Categorias

1º teste (11 de abril de 2018) — duração: 2 horas

1. Seja $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	3	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	3	4	2	2	5

Dado $X \subseteq A$, define-se

$$\begin{array}{lcl} X_0 & = & X; \\ X_{i+1} & = & X_i \cup \{h(x) \,|\, h \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{1,2\}\}, i \in \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Seja $X = \{1\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, determine X_k. Indique $Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Justifique.

2. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um homomorfismo. Mostre que o conjunto dos pontos fixos de α, $P_\alpha = \{a \in A \,|\, \alpha(a) = a\}$, é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

3. Considere as álgebras $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{a,b\}; +^{\mathcal{B}})$ de tipo (2), onde $+^{\mathcal{A}}$ representa a adição usual em $\mathbb{Z}$ e $+^{\mathcal{B}} : \{a,b\} \times \{a,b\} \to \{a,b\}$ é a operação binária em $\{a,b\}$ definida por

$+^{\mathcal{B}}$	a	b
a	a	b
b	b	a

Seja $\alpha : \mathbb{Z} \to \{a,b\}$ a aplicação definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \text{ é par} \\ b & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(a) Mostre que a aplicação α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

(b) Justifique que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/\mathrm{ker}\alpha$. Defina a operação da álgebra $\mathcal{A}/\ker\alpha = (\mathbb{Z}/\ker\alpha; +^{\mathcal{A}/\ker\alpha})$.

4. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$ o homomorfismo definido por $\alpha(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$. Justifique que α é um monomorfismo se e só se $\theta = \triangle_A$.

5. Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado distributivo e $r \in R$. Seja θ_r a relação de equivalência em R definida por

$$(x,y) \in \theta_r \text{ sse } x \wedge r = y \wedge r, \text{ para quaisquer } x, y \in R.$$

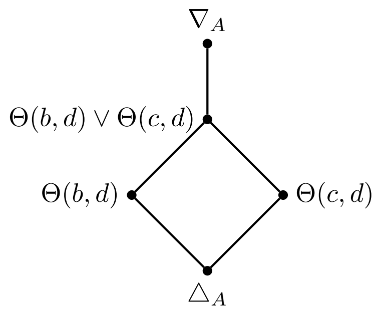
Mostre que a relação θ_r é uma congruência em $\mathcal{R}$.

6. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ tal que $A = \{a,b,c,d\}$, $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	d	c	c	c

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	b	c	d	c

e cujo reticulado de congruências pode ser representado por



(v.s.f.f.)

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $\Theta(b, d) \cup \Theta(c, d) = \Theta(b, d) \vee \Theta(c, d)$.

(b) Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são álgebras tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{C}$ é a álgebra trivial.

(c) A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

7. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.

Cotação: 1.(2.0); 2.(2.5); 3.(2.5+1.5); 4.(2.0); 5.(2.5) 6.(2.5+1.5+1.0) 7.(2.0).