Álgebra Universal e Categorias

1º teste (11 de abril de 2018) — duração: 2 horas

1. **Seja $\mathcal{A} = (\{1,2,3,4,5\}; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por**

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	3	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	3	4	2	2	5

Dado $X \subseteq A$, define-se

$$\begin{array}{lcl} X_0 & = & X; \\ X_{i+1} & = & X_i \cup \{h(x) \,|\, h \text{ é operação } n\text{-ária em } \mathcal{A} \text{ e } x \in (X_i)^n, n \in \{1,2\}\}, i \in \mathbb{N}_0. \end{array}$$

Seja $X = \{1\}$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, determine X_k. Indique $Sg^{\mathcal{A}}(X)$. Justifique.

Considerando $X = \{1\}$, tem-se

$$\begin{array}{l} X_0 = \{1\}, \\ X_1 = X_0 \cup \{f^{\mathcal{A}}(x,y) \,|\, x,y \in X_0\} \cup \{g^{\mathcal{A}}(x) \,|\, x \in X_0\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{1,2,3\}, \\ X_2 = X_1 \cup \{f^{\mathcal{A}}(x,y) \,|\, x,y \in X_1\} \cup \{g^{\mathcal{A}}(x) \,|\, x \in X_1\} = \{1,2,3\} \cup \{2\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\} \\ X_3 = X_2 \cup \{f^{\mathcal{A}}(x,y) \,|\, x,y \in X_2\} \cup \{g^{\mathcal{A}}(x) \,|\, x \in X_2\} = \{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}. \end{array}$$

Além disso, $5 \neq f^{\mathcal{A}}(x,y)$ e $5 \neq g^{\mathcal{A}}(x)$, para quaisquer $x, y \in \{1,2,3,4\}$. Logo, para todo $k \geq 2$, $X_k = \{1,2,3,4\}$.

Uma vez que $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$, então $Sg^{\mathcal{A}}(X) = \{1,2,3,4\}$.

2. **Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um homomorfismo. Mostre que o conjunto dos pontos fixos de α, $P_\alpha = \{a \in A \,|\, \alpha(a) = a\}$, é um subuniverso de $\mathcal{A}$.**

Por definição de P_α, é imediato que $P_\alpha \subseteq A$. Além disso, para qualquer símbolo de operação n-ário f e para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in P_\alpha$, $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) \in P_\alpha$. De facto, $f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) \in A$, pois $f^{\mathcal{A}}$ é uma operação n-ária em A, e

$$\begin{array}{lcll} \alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)) & = & f^{\mathcal{A}}(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) & (\alpha \text{ é um homomorfismo de } \mathcal{A} \text{ em } \mathcal{A}) \\ & = & f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) & (x_1, \ldots, x_n \in P_\alpha) \end{array}$$

Desta forma, fica provado que P_α é um subuniverso de $\mathcal{A}$.

3. **Considere as álgebras $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{A}})$ e $\mathcal{B} = (\{a,b\}; +^{\mathcal{B}})$ de tipo (2), onde $+^{\mathcal{A}}$ representa a adição usual em $\mathbb{Z}$ e $+^{\mathcal{B}} : \{a,b\} \times \{a,b\} \to \{a,b\}$ é a operação binária em $\{a,b\}$ definida por**

$+^{\mathcal{B}}$	a	b
a	a	b
b	b	a

Seja $\alpha : \mathbb{Z} \to \{a,b\}$ a aplicação definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} a & \textbf{se } x \textbf{ é par} \\ b & \textbf{se } x \textbf{ é ímpar} \end{cases}$$

(a) **Mostre que a aplicação α é um epimorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.**

Pretendemos mostrar que α é um homomorfismo e que é uma aplicação sobrejetiva.

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$,

- se x e y são pares, então $x +^{\mathcal{A}} y$ é par, pelo que

$$\alpha(x +^{\mathcal{A}} y) = a = a +^{\mathcal{B}} a = \alpha(x) +^{\mathcal{B}} \alpha(y);$$

- se x e y são ímpares, então $x +^{\mathcal{A}} y$ é par, pelo que

$$\alpha(x +^{\mathcal{A}} y) = a = b +^{\mathcal{B}} b = \alpha(x) +^{\mathcal{B}} \alpha(y);$$

- se x é par e y é ímpar, então $x +^{\mathcal{A}} y$ é ímpar, pelo que

$$\alpha(x +^{\mathcal{A}} y) = b = a +^{\mathcal{B}} b = \alpha(x) +^{\mathcal{B}} \alpha(y);$$

- se x é ímpar e y é par, então $x +^{\mathcal{A}} y$ é ímpar, pelo que

$$\alpha(x +^{\mathcal{A}} y) = b = b +^{\mathcal{B}} a = \alpha(x) +^{\mathcal{B}} \alpha(y).$$

Assim, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, $\alpha(x +^{\mathcal{A}} y) = \alpha(x) +^{\mathcal{B}} \alpha(y)$. Logo α é um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.

Para qualquer $y \in \{a, b\}$, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha(x) = y$: de facto, se $y = a$, existe $x = 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha(x) = y$; se $y = b$, existe $x = 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha(x) = y$. Logo α é uma aplicação sobrejetiva.

(b) **Justifique que $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/\mathrm{ker}\alpha$. Defina a operação da álgebra $\mathcal{A}/\ker\alpha = (\mathbb{Z}/\ker\alpha; +^{\mathcal{A}/\ker\alpha})$.**

Uma vez que $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um epimorfismo, então, pelo Teorema do Homomorfismo, tem-se $\mathcal{A}/\ker\alpha \cong \mathcal{B}$.

Considerando a definição de $\ker\alpha$, tem-se

$$[0]_{\ker\alpha} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (x, 0) \in \ker\alpha\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \alpha(x) = \alpha(0)\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ é par}\},$$

$$[1]_{\ker\alpha} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, (x, 1) \in \ker\alpha\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \alpha(x) = \alpha(1)\} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ é ímpar}\}.$$

Assim, $\mathbb{Z}/\ker\alpha = \{[0]_{\ker\alpha}, [1]_{\ker\alpha}\}$. Logo a operação $+^{\mathcal{A}/\ker\alpha}$ é definida por

$+^{\mathcal{A}/\ker\alpha}$	$[0]_{\ker\alpha}$	$[1]_{\ker\alpha}$
$[0]_{\ker\alpha}$	$[0]_{\ker\alpha}$	$[1]_{\ker\alpha}$
$[1]_{\ker\alpha}$	$[1]_{\ker\alpha}$	$[0]_{\ker\alpha}$

4. **Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra, $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ e $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\theta$ o homomorfismo definido por $\alpha(a) = [a]_\theta$, para todo $a \in A$. Justifique que α é um monomorfismo se e só se $\theta = \triangle_A$.**

Suponhamos que α é um monomorfismo. Então α é um homomorfismo e é uma aplicação injetiva. Pretende--se mostrar que $\theta = \triangle_A$ (onde $\triangle_A = \{(x, x) \,|\, x \in A\}$). Uma vez que θ é uma congruência em $\mathcal{A}$, então θ é uma relação de equivalência em A e, em particular, é uma relação reflexiva. Logo $\triangle_A \subseteq \theta$. Além disso, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{array}{rcll} (x, y) \in \theta & \Rightarrow & [x]_\theta = [y]_\theta & \\ & \Rightarrow & \alpha(x) = \alpha(y) & \text{(definição de } \theta) \\ & \Rightarrow & x = y & (\alpha \text{ é injetiva}) \\ & \Rightarrow & (x, y) \in \triangle_A. & \end{array}$$

Assim, $\theta \subseteq \triangle_A$ e, portanto, $\theta = \triangle_A$.

Reciprocamente, admitamos que $\theta = \triangle_A$. Então, para quaisquer $x, y \in A$,

$$\begin{array}{rcll} \alpha(x) = \alpha(y) & \Rightarrow & [x]_\theta = [y]_\theta & \\ & \Rightarrow & (x, y) \in \theta & \\ & \Rightarrow & x = y & (\text{ pois } \theta = \triangle_A). \end{array}$$

Logo α é uma aplicação injetiva. Uma vez que α é um homomorfismo, então α é um monomorfismo.

5. **Sejam $\mathcal{R} = (R; \wedge, \vee)$ um reticulado distributivo e $r \in R$. Seja θ_r a relação de equivalência em R definida por**

$$(x, y) \in \theta_r \text{ sse } x \wedge r = y \wedge r, \text{ para quaisquer } x, y \in R.$$

Mostre que a relação θ_r é uma congruência em $\mathcal{R}$.

A relação θ é uma congruência em $\mathcal{R}$ se é uma relação de equivalência em R e é compatível com as operações de $\mathcal{R}$. Uma vez que θ é uma relação de equivalência em R, resta mostrar que θ é compativel com as operações $\wedge$ e $\vee$.

Para quaisquer $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$,

$$\begin{aligned} (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta &\Rightarrow a_1 \wedge r = b_1 \wedge r \text{ e } a_2 \wedge r = b_2 \wedge r \\ &\Rightarrow (a_1 \wedge r) \wedge (a_2 \wedge r) = (b_1 \wedge r) \wedge (b_2 \wedge r) \\ &\Rightarrow (a_1 \wedge a_2) \wedge r = (b_1 \wedge b_2) \wedge r \quad (\wedge \text{ é associativa, comutativa e idempotente}) \\ &\Rightarrow (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2) \in \theta. \end{aligned}$$

Para quaisquer $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R$,

$$\begin{aligned} (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta &\Rightarrow a_1 \wedge r = b_1 \wedge r \text{ e } a_2 \wedge r = b_2 \wedge r \\ &\Rightarrow (a_1 \wedge r) \vee (a_2 \wedge r) = (b_1 \wedge r) \vee (b_2 \wedge r) \\ &\Rightarrow (a_1 \vee a_2) \wedge r = (b_1 \vee b_2) \wedge r) \quad (\text{o reticulado } \mathcal{R} \text{ é distributivo}) \\ &\Rightarrow (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2) \in \theta. \end{aligned}$$

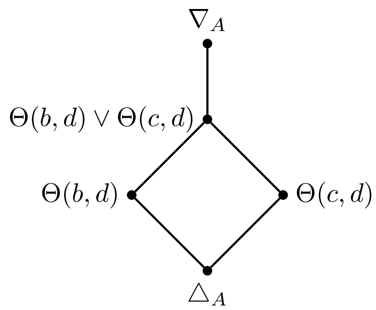
Assim, θ é compatível com as operações $\wedge$ e $\vee$ e, portanto, θ é uma congruência em $\mathcal{A}$.

6. **Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ tal que $A = \{a, b, c, d\}$, $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por**

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	d	c	c	c

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	b	c	d	c

e cujo reticulado de congruências pode ser representado por



Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $\Theta(b, d) \cup \Theta(c, d) = \Theta(b, d) \vee \Theta(c, d)$.

Por definição, $\Theta(b, d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\{(b, d)\}$.

Então, atendendo a que

(i) $(b, d) \in \Theta(b, d)$;
(ii) $\Theta(b, d)$ é reflexiva;
(iii) $\Theta(b, d)$ é simétrica;
(iv) $\Theta(b, d)$ é transitiva;
(v) $\Theta(b, d)$ é compatível com as operações de $\mathcal{A}$.

tem-se

(vi) $\triangle_A \subseteq \Theta(b, d)$, por (ii);
(vii) $(b, d) \in \Theta(b, d)$, por (i);
(viii) $(d, b) \in \Theta(b, d)$, por (i) e (iii);
(ix) $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(d)) = (c, c), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c, c) \in \Theta(b, d)$, por (vii), (viii) e (v);
(x) $(g^{\mathcal{A}}(b), g^{\mathcal{A}}(d)) = (c, c), (g^{\mathcal{A}}(d), g^{\mathcal{A}}(b)) = (c, c) \in \Theta(b, d)$, por (vii), (viii) e (v).

Logo, a relação $\triangle_A \cup \{(b,d),(d,b)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(b,d)\}$. Uma vez que $\triangle_A \cup \{(b,d),(d,b)\} \subseteq \Theta(b,d)$ e $\Theta(b,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(b,d)\}$, tem-se $\Theta(b,d) = \triangle_A \cup \{(b,d),(d,b)\}$.

De modo análogo, determina-se $\Theta(c,d)$. Uma vez que $\Theta(c,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(c,d)\}$, tem-se

- $\triangle_A \subseteq \Theta(c,d)$;
- $(c,d) \in \Theta(c,d)$;
- $(d,c) \in \Theta(c,d)$;
- $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (c,c), (f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (c,c) \in \Theta(c,d)$;
- $(g^{\mathcal{A}}(c), g^{\mathcal{A}}(d)) = (d,c), (g^{\mathcal{A}}(d), g^{\mathcal{A}}(c)) = (c,d) \in \Theta(c,d)$.

A relação $\triangle_A \cup \{(c,d),(d,c)\}$ é uma menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(c,d)\}$. Como a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\{(c,d)\}$ é $\Theta(c,d)$, então $\Theta(c,d) = \triangle_A \cup \{(c,d),(d,c)\}$.

Assim,

$$\Theta(b,d) \cup \Theta(c,d) = \triangle_A \cup \{(b,d),(d,b),(c,d),(d,c)\}.$$

A relação $\Theta(b,d) \vee \Theta(c,d)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contem $\Theta(b,d)$ e $\Theta(c,d)$, pelo que

$$\Theta(b,d) \vee \Theta(c,d) = \Theta(b,d) \cup \Theta(c,d) \cup \{(b,c),(c,b)\}.$$

Logo $\Theta(b,d) \cup \Theta(c,d) \neq \Theta(b,d) \vee \Theta(c,d)$.

(b) **Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são álgebras tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{C}$ é a álgebra trivial.**

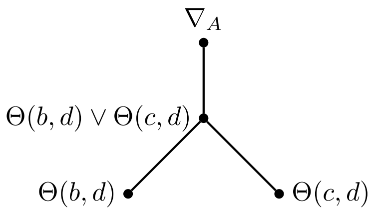
Caso existam álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, ambas não triviais, tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então a álgebra $\mathcal{A}$ não é diretamente indecomponivel. A álgebra $\mathcal{A}$ é directamente indecompnível se só se as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ são $\triangle_A$ e ∇_A. Recorde-se que, dada uma congruência θ_1 de $\mathcal{A}$, diz-se que θ_1 é uma congruência fator de $\mathcal{A}$ se existe $\theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$ tal que $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$, $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$ e $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$. No caso do reticulado $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ indicado anteriormente, verifica-se que, para quaisquer $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$,

- se $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}A \setminus \{\nabla_A\}$, então $\theta_1 \vee \theta_2 \neq \nabla_A$;
- se $\theta_1 = \nabla_A$ e $\theta_2 \in \mathrm{Con}A \setminus \{\triangle_A\}$, então $\theta_1 \cap \theta_2 = \theta_2 \neq \triangle_A$;
- $\triangle_A$ e ∇_A são claramente congruências fator de $\mathcal{A}$,

e, portanto, as únicas congruências fator de $\mathcal{A}$ são $\triangle_A$ e ∇_A. Assim, a álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. Por conseguinte, se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são álgebras tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, então $\mathcal{B}$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{C}$ é a álgebra trivial.

(c) **A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.**

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou o conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo. Obviamente, a álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial (pois $|A| = 4 \neq 1$. Também é claro que o conjunto parcialmente ordenado $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$, representado por



não tem elemento mínimo, pois não existe $\theta \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tal que $\theta \subseteq \sigma$, para todo $\sigma \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

7. **Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.**

O operador SHS é um operador de fecho se, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

(i) $\mathbf{K} \subseteq SHS(\mathbf{K})$;

(ii) $(SHS)^2(\mathbf{K}) = SHS(\mathbf{K})$;

(iii) $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow SHS(\mathbf{K}) \subseteq SHS(\mathbf{K}')$.

Tal como se prova seguidamente, as condições (i), (ii) e (iii) são, de facto, satisfeitas.

(i) Para qualquer operador $O \in \{H, S, P, I, I_P\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, tem-se $\mathbf{K} \subseteq O(\mathbf{K})$. Assim, $\mathbf{K} \subseteq S(\mathbf{K})$, $S(\mathbf{K}) \subseteq HS(\mathbf{K})$, $HS(\mathbf{K}) \subseteq SHS(\mathbf{K})$, donde resulta que $\mathbf{K} \subseteq SHS(\mathbf{K})$.

(ii) De (i) segue que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $S(\mathbf{K}) \subseteq SSHS(\mathbf{K})$, donde $HS(\mathbf{K}) \subseteq HSSHS(\mathbf{K})$ e, portanto, $SHS(\mathbf{K}) \subseteq SHSSHS(\mathbf{K})$. Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, também se tem

$$\begin{array}{rcll} SHSSHS(\mathbf{K}) & = & SHSHS(\mathbf{K}) & (S^2 = S) \\ & \subseteq & SHHSS(\mathbf{K}) & (SH \subseteq HS) \\ & = & SHS(\mathbf{K}) & (H^2 = H, S^2 = S). \end{array}$$

Logo $(SHS)^2 = SHS$.

(iii) Para qualquer operador $O \in \{H, S, P, I, I_P\}$ e para quaisquer classes de álgebra $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow S(\mathbf{K}) \subseteq S(\mathbf{K}') \Rightarrow HS(\mathbf{K}) \subseteq HS(\mathbf{K}') \Rightarrow SHS(\mathbf{K}) \subseteq SHS(\mathbf{K}').$$

Cotação: 1.(2.0); 2.(2.5); 3.(2.5+1.5); 4.(2.0); 5.(2.5) 6.(2.5+1.5+1.0) 7.(2.0).